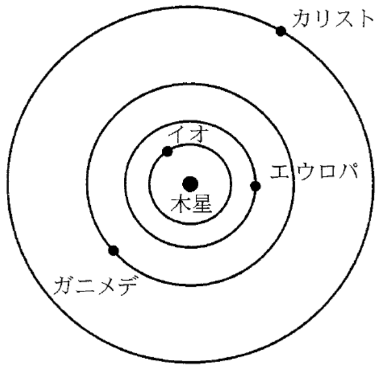
入試問題研究 第185回　2006年 岡山 ④ 万有引力

第4問　ガリレオ・ガリレイは、1610年に木星が4つの衛星を持つことを発見した。図-4(a) 似示すように、軌道の内側からイオ、エウロパ、ガニメデ、カリストの4つのガリレオ衛星と呼ばれるものである。3年A組では、課題研究として望遠鏡を用いてこれらのガリレオ衛星の運動を観測し、木星の質量を求めた。



(1) 測定方法の原理

図4(b) に示すように、質量 M の木星の周りを、質量 m のガリレオ衛星が等速円運動をしているものとする。衛星の軌道半径を R、角速度を ω 、公転周期を T とする。衛星の運動を軌道面の真横から観測したとすると、その正射影は単振動と同じ運動をする。時刻 t における原点Oから正射影の変位 x を R、T、t を用いて表すと x =（ テ ）となる。ただし、t = 0 のとき、衛星の正射影は原点Oにあったものとする。衛星は円の中心すなわち木星に向かって向心力を受けている。

万有引力定数をGとすると、この向心力の大きさが万有引力の大きさ（ ト ）に等しいから $\dfrac{T^2}{R^3}$ =（ ナ ）=（一定）となり、

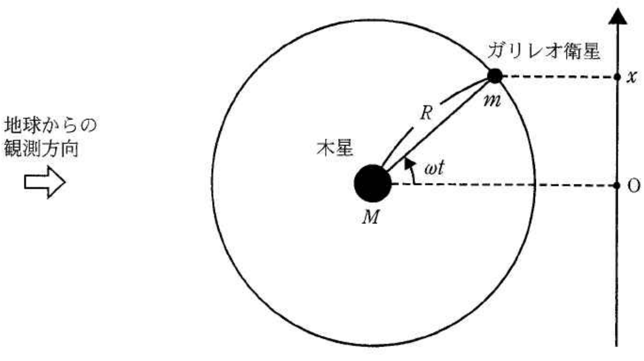


図4(b)

ケプラーの第三法則が導かれる。この関係式から、木星の質量 M を求めることができる。

(2) 観測結果

ガリレオ衛星を望遠鏡で10日間観測し、時刻 t における x の値を調べた。このデータを x =（ テ ）の関係式を用いて解析し、したの表に示すような軌道半径 R [m] と公転周期 T [s] を求めた。表には、R^3 と T^2 の計算結果も示した。

衛　星	R [m]	T [s]	R^3 [m^3]	T^2 [s^2]
イ オ	4.2×10^8	1.5×10^5	0.074×10^{27}	0.023×10^{12}
エ ウ ロ パ	6.7×10^8	3.1×10^5	0.30×10^{27}	0.096×10^{12}
ガ ニ メ デ	11×10^8	6.2×10^5	1.3×10^{27}	0.38×10^{12}
カ リ ス ト	19×10^8	14×10^5	6.9×10^{27}	2.0×10^{12}

これらのガリレオ衛星について、R^3 を横軸に T^2 を縦軸にとって、解答用紙の方眼メモリ上にグラフを作成しなさい。測定値を×印で示し、R^3 と T^2 の関係を表す線を描きなさい。

(3) 考察と結論

作成したグラフから、木星のガリレオ衛星に対してケプラーの第三法則が成り立つことがわかる。グラフの線の傾きを有効数字2桁で求めると、$\dfrac{T^2}{R^3}$ =（ ナ ）の関係式を用いると、木星の質量 M は有効数字1桁で（ ヌ ）[kg] となる。計算においては、万有引力定数 $G=6.67\times10^{-11}=\dfrac{20}{3}\times10^{-11}$ [Nm^2/kg^2]、$\pi^2=9.9$ の近似式を用いなさい。

入試問題研究 第185回　2006年 岡山 ④ 万有引力　解答・解説

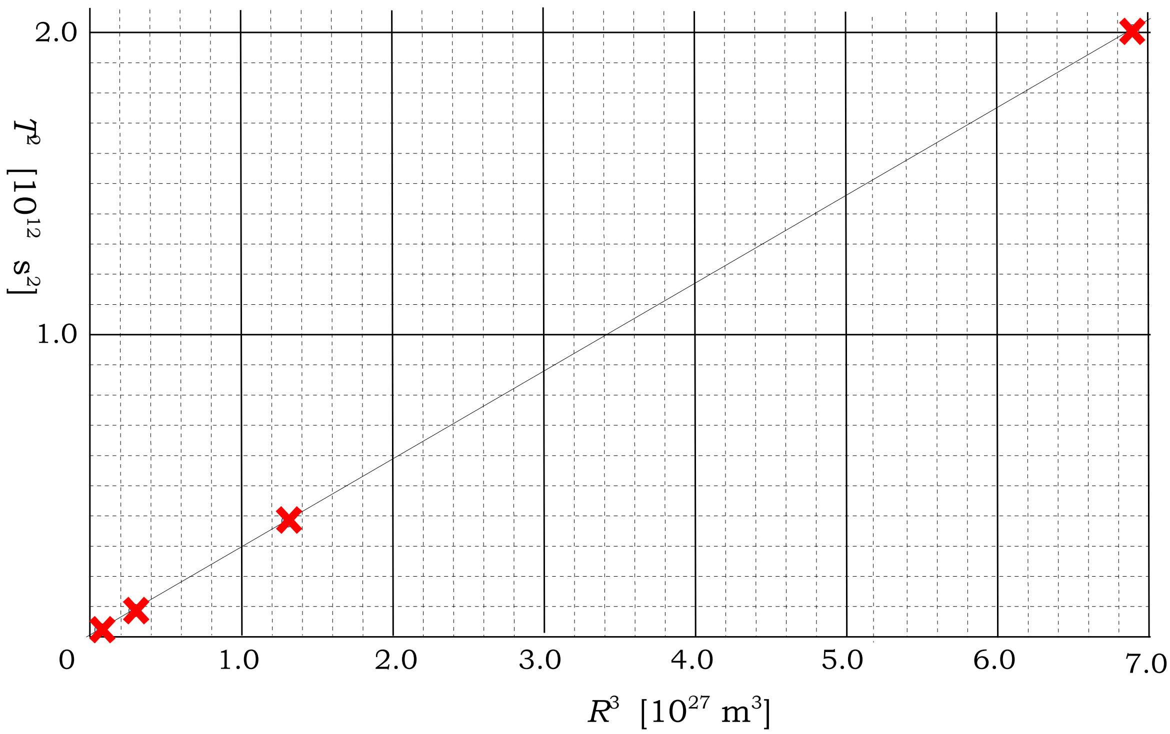
(1) 測定方法の原理

時刻 t における原点Oから正射影の変位は $x=R\sin\omega t=R\sin\dfrac{2\pi t}{T}$ ・・・(テ) となる。

質量 M の木星の周りを、質量 m のガリレオ衛星が等速円運動するとき、衛星の軌道半径を R、角速度を ω、公転周期を T とすると、衛星が受ける万有引力は $f=\dfrac{G\cdot M m}{R^2}$ ・・・(ト) であり、これが衛星の向心力となる。よって $mR\omega^2=\dfrac{G\cdot M m}{R^2}$ の関係式が成立する。また、$T=\dfrac{2\pi}{\omega}$ を代入し $\dfrac{R^3}{T^2}=\dfrac{GM}{4\pi^2}$ ・・・(ナ) の関係式(ケプラーの第三法則)が得られる。

この関係式から、木星の質量は $M=\dfrac{4\pi^2R^3}{GT^2}$ であることがわかる。

(2) 観測結果のグラフ



(3) 考察と結論

作成したグラフから、測定データが原点を通る直線に乗っているので、公転周期の2乗(T^2)と公転半径の3乗(R^3)が比例するので、木星のガリレオ衛星に対してケプラーの第三法則が成り立っていることがわかる。

グラフの線の傾きを有効数字2桁で求めると、$\dfrac{T^2}{R^3}=2.9\times10^{-16}$ ・・・(ナ) である。また、前述の関係式 $\dfrac{R^3}{T^2}=\dfrac{GM}{4\pi^2}$ より、木星の質量 M を求めると $M=\dfrac{4\pi^2R^3}{GT^2}$ になる。

以上の結果より、測定データを代入すると、$M=\dfrac{4\times9.9\times3}{20\times10^{-11}\times2.9\times10^{-16}}=2.04..\times10^{27}$ だから、木星の質量は 2×10^{27} ・・・(ヌ) [kg] であることがわかる。