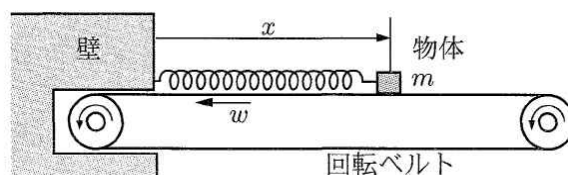


入試問題研究 第187回 2006年 大阪大学 ① 単振動

[1] 図のように、大きさが無視できる質量 m の物体が、水平なばねで壁とつながれ、回転ベルトの水平部分の上に置かれている。ばねは十分に長い自然長 d を持ち、ばね定数は k である。物体とベルトの間の静止摩擦係数は μ_1 、動摩擦係数は



μ_2 で、 $\mu_1 > \mu_2$ である。回転ベルトの上側のベルトは、図のように壁に向かって一定の速さ w で動かすことができる(以後、回転ベルトの上側のベルトを単にベルトと呼ぶ)。 w の大きさを変化させたとき、 w のある値を境にして、物体の運動の様子が大きく変化するのが観測された。物体の、静止した壁に対する(壁から見た)運動と、動いているベルトに対する(ベルトから見た)相対運動とに注意しながら、この変化について考察しよう。壁面を原点とする物体の位置座標を x 、図の右向きを x の正の向きとし、重力加速度を g として、以下の記述の中の問いに答えよ。

I まず、ベルトが静止した状態($w=0$)で、 $x=d$ の位置に、物体をベルトの上に静止させて置いた。次に、小さな w でベルトを動かした。すると、物体はベルトに運ばれて壁に近づき、ある位置 $x=x_0$ で、ベルトに対して右向きに、静かに(ベルトに対する相対的な初速度 0 で)滑り出した。

問1 x_0 を、 d 、 m 、 k 、 μ_1 、 μ_2 、 w 、 g の中の必要なものを用いて表しなさい。

II 今度は、まず物体を上で決めた $x=x_0$ の位置まであらかじめ手で移し、一定の速さ w で動いているベルトの上で静かに離した。すると、物体は壁に対する初速度 0 で右に滑り出した。この後の物体の運動を見てみよう。

問2 物体が右向きに滑っているとき、物体の位置を x 、加速度を a (右向きを正の向きとする)として、物体の運動方程式を求めよ。

この運動方程式は、ある見かけの自然長 L 、ばね定数 k の水平なばねで壁につながれた質量 m の、摩擦の無い水平面上での運動の運動方程式と同じである。したがって、物体の運動を、このような単純な状況での運動に置きかえて考えることができる。

問3 L を d 、 m 、 k 、 μ_1 、 μ_2 、 w 、 g の中の必要なものを用いて表しなさい。

問4 物体が壁から最も離れる位置(最大伸びの位置)を $x=x_M$ として、 x_M を、 L と x_0 を用いて表せ。

$x=x_M$ の位置では物体は壁に対して静止するが、このときもベルトは壁に向かって動いている。したがって、物体のベルトに対する相対的な運動の向きは変わらず、物体に働く摩擦力の向きも変わらない。この後、物体は壁の向きに加速され、ベルトと同じ速さになったところで、ベルトに対して静止する。その瞬間まで、物体は上で述べた摩擦の無い水平面上での運動方程式に従って運動する。

問5 ベルトに対して静止する位置の x の値を、 L 、 x_0 、 m 、 k 、 w を用いて表せ。結果だけでなく、その導出の過程も記せ。

物体がいったんベルトに対して静止すると、摩擦は動摩擦から静止摩擦に変わるので、この後、物体はベルトに対して静止したまま、ベルトに運ばれて壁に近づき、 $x=x_0$ で再び滑り出す。

III 次に、 w を少しずつ増加させながら、同様に $x=x_0$ で手を離す実験を繰り返した。すると w がある値 w_c を超えたとき、物体はベルトに対して静止することなく、単振動を続けるようになった。

問6 w_c を、 m 、 k 、 μ_1 、 μ_2 、 g を用いて表せ。

このように、 w が十分に大きいときには、ベルトと物体の間に摩擦があるにもかかわらず、物体は単振動を継続する。

入試問題研究 第187回 2006年 大阪大学 ① 単振動 解答・解説

[1] この問題に類似問題が過去に東京大学、姫路工業大学で出題(入試問題研究第93回、第65回)されているので、こちらのほうの問題にもチャレンジして欲しい。

問1 ばねの力が最大摩擦力を超えるときだから $k(d-x_0)=\mu_1 mg$ が成立するときである。

よって、そのときの物体の位置は $x_0=d-\frac{\mu_1 mg}{k}$ である。

問2 物体に働く力の合力を考えれば運動方程式は簡単だ。ばねの力 $+k(d-x)$ 、ベルトとの動摩擦力 $-\mu_2 mg$ だから、運動方程式は $ma=k(d-x)-\mu_2 mg$ である。

問3 摩擦の無いときの自然長 L のばねの単振動の運動方程式は $ma=k(L-x)$ である。

問2の運動方程式を変形して $ma=k\left\{d-\frac{\mu_2 mg}{k}-x\right\}$ であるから $L=d-\frac{\mu_2 mg}{k}$ とす

れば良いことに気づく。よって、見かけのばねの自然長は $d-\frac{\mu_2 mg}{k}$ である。

問4 $x=x_0$ で静かに手を離れた¹ のだから、物体の速度はゼロだ。よって、手を離れた位置が単振動の左端にあたる。単振動の中心は見かけの自然長 L の位置だから、単振動の振幅は $A=L-x_0$ となる。よって、単振動の右端の位置は中心より振幅分右になるから、物体が壁から最も離れる位置は $x_M=L+A$ だから $x_M=2L-x_0$ である。

[参考] 単振動の公式より、このときの単振動の角振動数は $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$ 、周期は $T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ である。

問5 一般に、単振動の速度と中心からの変位 x と速度 v の公式は $x^2+\left(\frac{v}{\omega}\right)^2=A^2$ である²。

ベルトに対して静止する(ベルトと同じ速度になる)位置を x_s とする。上の公式に代入して、整理すると $(L-x_s)^2+\frac{mw^2}{k}=(L-x_0)^2$ であるので、これより、 $x_s=L\pm\sqrt{(L-x_0)^2-\frac{mw^2}{k}}$ の位置でベルトに対して静止する(ベルトと同じ速度になる)。

手を離れたときから右に動き始めるので、単振動の右端の位置まではベルトの動きと逆むきのままだ(同速にはなれない)。最初にベルトの動きと同じになるのはその後だから、

$x_s=L+\sqrt{(L-x_0)^2-\frac{mw^2}{k}}$ の位置で初めてベルトに対して静止できる。

[注] 計算上では $x_s=L-\sqrt{(L-x_0)^2-\frac{mw^2}{k}}$ もベルトと同じ速度のはずだが、前者で静止してしまうので、この位置には物体は来ない。

問6 同速になる位置 $x_s=L\pm\sqrt{(L-x_0)^2-\frac{mw^2}{k}}$ が存在しない条件は $(L-x_0)^2-\frac{mw^2}{k}<0$

である。ここで、 $L-x_0=\left(d-\frac{\mu_2 mg}{k}\right)-\left(d-\frac{\mu_1 mg}{k}\right)$ だから $L-x_0=\frac{(\mu_1-\mu_2)mg}{k}$ となる。

これを代入整理して、条件を求めると $w>\frac{(\mu_1-\mu_2)g\sqrt{mk}}{k}$ である。よって、単振動になるべ

ルトの速度の境界値は $w_c=\frac{(\mu_1-\mu_2)g\sqrt{mk}}{k}$ である。

1 ベルトの上に乗っていたとする事例は東京大学で出題されている(入試問題研究第93回参照)。

2 単振動の公式 $x=A\sin\omega t$ 、 $v=A\omega\cos\omega t$ を $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ の公式に代入すれば導出できる公式である。この公式はあまり見かけない公式だが、知っていて損は無い公式である(脚注1でも使われている公式!)。