

## 入試問題研究 第189回 2006年 東京工業大学 ③ 力学

水平面上を直線運動する、水平な床をもつ台車がある。台車は外力によって自由に加速度を変えることができるものとする。図のように、台車の床の上には前後方向に勾配を持つ傾斜角  $\theta$  の斜面が固定されている。この斜面上には、質量  $m$  の小物体が置かれている。ここで、斜面と小物体との間の静止摩擦係数を  $\mu$ 、動摩擦係数  $\mu'$  とする。この斜面の右側には曲面がなめらかにつながっている。重力加速度を  $g$  として、以下の問いに答えよ。ただし、小物体の運動は台車の上から観測するものとする。

**[A]** 台車は一定の加速度  $\alpha (>0)$  で、図の左向き(正の向きとする)に運動を始めた。

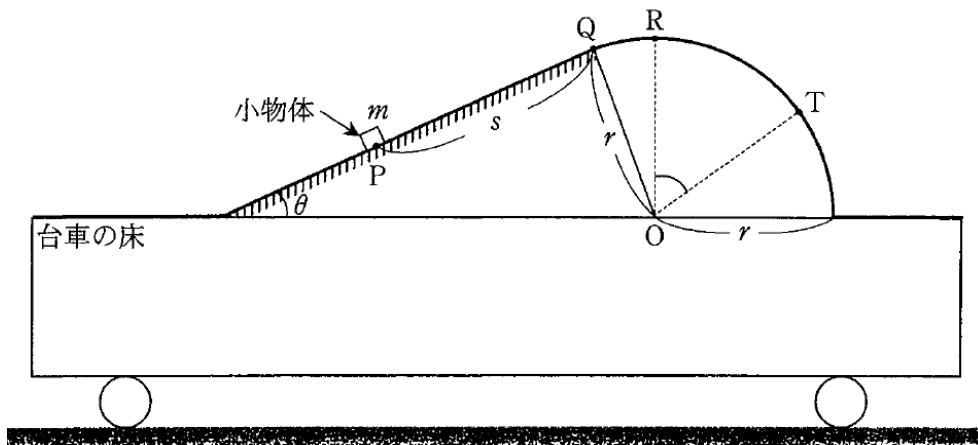
- (a) 図のように、小物体を斜面上の P 点に置き静かに手を離れたところ、小物体は斜面を一定の加速度で登り始めた。このとき台車の上の観測者から見た、小物体に働く全ての力の向きを図示し、その名称を記入せよ。
- (b) P 点から斜面に沿って距離  $s$  だけのぼった地点を Q 点とする。小物体が Q 点を通過したとすると、Q 点通過時の小物体の速さ  $v_Q$  はいくらか。
- (c) もし傾斜角  $\theta$  が、ある角  $\theta_c$  以上 ( $\theta > \theta_c$ ) であるならば、この物体はいかなる  $\alpha$  でも斜面をのぼることはできない。この  $\theta_c$  はいくらか。  $\tan \theta_c$  で答えよ。

**[B]** 斜面は Q 点の高さのところ、前後方向の断面が円弧となる曲面になめらかにつながる。この円弧の半径は  $r$  で、中心 O は台車の床と同じ面内にある。また、小物体と曲面との間には摩擦力は働かないとする。小物体が Q 点を通過した直後に台車は加速をやめ、台車の運動は等速直線運動に変わった。

- (d) Q 点を速さ  $v_Q$  で通過した直後の小物体が、曲面から受ける垂直抗力の大きさはいくらか。 $v_Q$  を用いて表せ。
- (e) 小物体は曲面から離れることなく、最高点の R 点を速さ  $v_R$  で通過した。 $v_R$  の最大の値はいくらか。

**[C]** 小物体が R 点を速さ  $v_R$  で通過した直後に、台車は加速度  $-\frac{\sqrt{3}}{3}g$  の等加速度運動に移行した。その後、小物体は曲面から離れることなく曲面上の T 点を通過した。

- (f) T 点における小物体の速さがちょうど  $v_R$  に等しかったとすると、 $\angle ROT$  は何度か。



# 入試問題研究 第189回 2006年 東京工業大学 ③ 力学 解答・解説

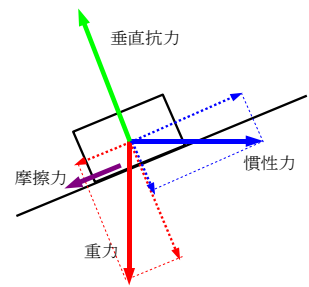
## [A] 運動方程式の作り方、等加速度運動の公式、静止摩擦力と最大摩擦力の関係だけ！

(a) 右図参照。

(b) 慣性力を  $m\alpha$ 、垂直抗力を  $N$ 、摩擦力を  $\mu'N$  とする。

斜面に垂直な力はつりあい  $N - m\alpha \sin\theta - mg \cos\theta = 0$  が成立するから、垂直抗力は  $N = m\alpha \sin\theta + mg \cos\theta$  である。

また、台車から見た物体の加速度を  $\alpha$  として斜面に平行な成分より運動方程式を作ると  $ma = m\alpha \cos\theta - mg \sin\theta - \mu'N$  だから  $\alpha = \alpha \cos\theta - g \sin\theta - \mu'(\alpha \sin\theta + g \cos\theta)$  である。Q点での速さ  $v_Q$  とすると、等加速度運動の公式より  $v_Q^2 - 0^2 = 2\{\alpha \cos\theta - g \sin\theta - \mu'(\alpha \sin\theta + g \cos\theta)\}s$  が成立し、 $v_Q = \sqrt{2\{\alpha \cos\theta - g \sin\theta - \mu'(\alpha \sin\theta + g \cos\theta)\}s}$  になる。



(c) もし傾斜角  $\theta$  が、ある角  $\theta_c$  以上 ( $\theta > \theta_c$ ) であるならば、この物体はいかなる  $\alpha$  でも斜面をのぼることはできない。「上に滑らない条件」は摩擦力が最大摩擦力を超えないことより、次の関係式  $m\alpha \cos\theta - mg \sin\theta < \mu(m\alpha \sin\theta + mg \cos\theta)$  が成立する。これを整理すると、 $\alpha(\cos\theta - \mu \sin\theta) < g(\mu \cos\theta + \sin\theta)$  である。  $\cos\theta - \mu \sin\theta \leq 0$  のとき加速度  $\alpha$  に関わらず常にこの条件は成立するので、このとき  $\tan\theta \leq \frac{1}{\mu}$  である。よって  $\tan\theta_c = \frac{1}{\mu}$  である。

## [B] 円運動するためには向心力が必要である！ 垂直抗力は負に成れない！

(d) Q点を速さ  $v_Q$  で通過した直後の小物体は円運動する。よって、向心力  $\frac{mv_Q^2}{r}$  が必要と

なる。重力と垂直抗力により向心力が作られるから  $mg \cos\theta - N = \frac{mv_Q^2}{r}$  が成立する。

よって、垂直抗力は  $N = mg \cos\theta - \frac{mv_Q^2}{r}$  である。

(e) 垂直抗力は  $N > 0$  であるから  $N = mg \cos\theta - \frac{mv_Q^2}{r} > 0$  より、 $v_Q < \sqrt{gr \cos\theta}$  である。

R点での速度  $v_R$  はエネルギー保存の法則より  $\frac{1}{2}mv_Q^2 = \frac{1}{2}mv_R^2 + mgr(1 - \cos\theta)$  が成立し、 $v_Q^2 = v_R^2 + 2gr(1 - \cos\theta)$  より  $gr \cos\theta > v_R^2 + 2gr(1 - \cos\theta)$  が成立する。よって、R点での速度  $v_R$  は  $v_R < \sqrt{gr(3 \cos\theta - 2)}$  より、最大値は  $\sqrt{gr(3 \cos\theta - 2)}$  になる。

## [C] 慣性力により、見かけの重力の向きが傾くことに気付けばよい。

(f) 慣性力  $\frac{\sqrt{3}}{3}mg$  が左向きに、重力が下向きに  $mg$  が働いている。T点での角度を  $\theta_T$  とす

ると、物体の水平方向の移動距離は右向きに  $r \sin\theta_T$ 、鉛直方向の移動距離は下向きに  $r(1 - \cos\theta_T)$  である。「速度が変わらないことから、物体が受けた仕事の和はゼロ」だから  $-\frac{\sqrt{3}}{3}mg \cdot r \sin\theta_T + mg \cdot r(1 - \cos\theta_T) = 0$  が成立する。整理すると  $\frac{\sqrt{3}}{3} \sin\theta_T = 1 - \cos\theta_T$  と

なるので  $\tan \frac{\theta_T}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$  が成立する<sup>1</sup>。よって  $\frac{\theta_T}{2} = 30^\circ$  だから、 $\angle ROT = 60^\circ$  である。

1  $\sin\theta_T = 2 \sin \frac{\theta_T}{2} \cos \frac{\theta_T}{2}$ 、 $1 - \cos\theta_T = 2 \sin^2 \frac{\theta_T}{2}$  を代入して整理すると  $\frac{\sqrt{3}}{3} \cos \frac{\theta_T}{2} = \sin \frac{\theta_T}{2}$  が成立する。

見かけの重力を考えて、物体の「見かけの高さが同じになるところ」と考える方法を使うと計算は簡単になる(解法の小技)。