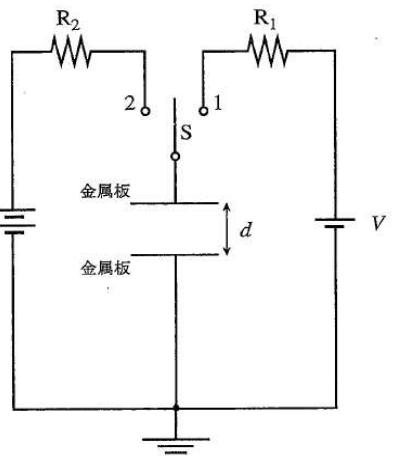


入試問題研究 第19回 2004年上智大学 理工 ② コンデンサー

図のように電圧 V と $2V$ の二つの電源と、2枚の同面積の金属板を距離 d だけ離して平行に置いた容量 C のコンデンサーを使った回路を考える。ここで R_1 、 R_2 は抵抗、Sはスイッチであり、回路は接地されている。最初、スイッチ S は切られており、コンデンサーには電荷は蓄えられない。この回路を使って、低い電位 V の電源から、高い電位 $2V$ の電源に力学的仕事を使って電荷を移動させるサイクルを考える。ただし、金属板の移動は十分ゆっくり行うとする。



1. まず、スイッチ S を 1 に入れ、コンデンサーに電荷を蓄えた。この状態を O とする。その後、スイッチ S を切り、金属板間を d から $3d$ に広げた。このときに外部から行った力学的仕事は $\boxed{1} \times CV^2$ である。次にスイッチ S を 2 に入れると、コンデンサーから $\boxed{2} \times CV$ の電荷が電位 $2V$ の電源に流れ込む。
2. 次に、スイッチ S を切り、金属板間の距離を $3d$ から d に戻した。このときにコンデンサーは $\boxed{3} \times CV^2$ の力学的仕事を外部に放出している。次にスイッチ S を 1 に入れると、コンデンサーには $\boxed{4} \times CV$ の電荷が電位 V の電源から流れ込み、コンデンサーは最初の状態 O に戻る。
3. 以上の、状態 O から出発して状態 O に戻るサイクルでは、電位 V の電源から電位 $2V$ の電源へ移った電荷の得た電気エネルギーは $\boxed{5} \times CV^2$ であり、外力は $\boxed{6} \times CV^2$ の仕事をこの系に対して行ったことになる。また、このサイクルで、抵抗 R_1 、 R_2 において消費されたエネルギーの合計は $\boxed{7} \times CV^2$ である。
4. 状態 O から状態 O に戻るサイクルにおいて、抵抗で消費されるエネルギーをゼロにするには、スイッチを入れた瞬間に電荷が移動しないように、電源とコンデンサーの電位差を $\boxed{8} \times V$ にしておけばよいので、次のようなサイクルを考えることになる。まず、状態 O においてスイッチ S を切り、金属板間の距離を d から $\boxed{9} \times d$ に広げる。そこで、スイッチ S を 2 に入れ、金属板間の距離をさらに $3d$ に広げる。次に、スイッチ S を切り、金属板間の距離を $3d$ から $\boxed{10} \times d$ まで戻し、スイッチ S を 1 に入れる。そこから金属板間の距離を d まで戻すことにより、状態を O に戻すことが出来る。以上のサイクルでは、抵抗において消費されるエネルギーはゼロであり、外力がこの系に対して行った力学的仕事は $\boxed{11} \times CV^2$ である。

入試問題研究 第19回 2004年上智大学 理工 ② コンデンサー

1. スイッチ1に接続したとき、コンデンサーには $Q_0 = CV$ の電荷が蓄えられる。スイッチを切って極板の間隔を $3d$ にする。この電荷は動けないこと、コンデンサーの電気容量の公式よりコンデンサーの電気容量が $C' = \frac{\epsilon_0 S}{3d} = \frac{1}{3} \frac{\epsilon_0 S}{d} = \frac{1}{3} C$ に変わることを使えばよい。コンデンサーの公式 $Q = CV$ より、このコンデンサーの電圧は $3V$ に変わる。これより、蓄えられている電気エネルギーは $U_0 = \frac{1}{2} CV^2$ から、 $U = \frac{1}{2} \cdot \frac{C}{3} \cdot (3V)^2 = \frac{3}{2} CV^2$ に変わる。よって、外部からなされた仕事は $U - U_0 = CV^2$ だから、 $1 \cdots [1]$ である。次にスイッチ2につなぐと、コンデンサーの電圧は $2V$ になるから、 $Q = \frac{1}{3} C \times 2V = \frac{2}{3} CV$ に変わるので、 $Q_0 - Q = \frac{1}{3} CV$ だけ電荷が電源に流れ込む。よって、 $\frac{1}{3} \cdots [2]$ である。
2. スイッチを切っているので $Q = \frac{2}{3} CV$ は変わらない。極板間隔を d に戻すから電気容量は C に戻る。コンデンサーのエネルギーの公式 $U = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$ より、このときのエネルギーは $\frac{2}{3} CV^2$ から $\frac{2}{9} CV^2$ になるから、外部に放出する仕事は $\frac{4}{9} CV^2$ だから、 $\frac{4}{9} \cdots [3]$ である。次にスイッチを1に入れるので電圧は V になるので電気量は $Q_0 = CV$ に戻る。よって、 $Q_0 - Q = \frac{1}{3} CV$ の電荷が流れ込むので、 $\frac{1}{3} \cdots [4]$ である。
3. 公式 $W = qV$ を使って電荷の移動によるエネルギーの出入りを計算する。 $2V$ の電源への電荷の流れ出しにより失われるエネルギーは、移動した電荷が $\frac{1}{3} CV$ で電位が $2V$ だから、 $W = \frac{2}{3} CV^2$ であるので、 $\frac{2}{3} \cdots [5]$ になる。また、 V の電源からの電荷の流れ込みにより得るエネルギーは、移動した電荷が $\frac{1}{3} CV$ で電位が V だから、 $W = \frac{1}{3} CV^2$ である。よって、電荷の移動により失われる正味のエネルギーは $W = \frac{1}{3} CV^2$ になる。
- 一方、外力がした正味の仕事は $CV^2 - \frac{4}{9} CV^2 = \frac{5}{9} CV^2$ だから、 $\frac{5}{9} \cdots [6]$ である。したがって、抵抗で消費されたエネルギーは外力がした正味の仕事から2つの電源とのやり取りで失ったエネルギーの差になるから $\frac{5}{9} CV^2 - \frac{1}{3} CV^2 = \frac{2}{9} CV^2$ である。よって $\frac{2}{9} \cdots [7]$ 。
4. 電荷移動がないように極板を広げるには、コンデンサーと $2V$ の電源との電位差が無ければよいから $0 \cdots [8]$ である。コンデンサーの電圧は $2V$ だから、 $Q_0 = CV = C' \cdot 2V$ が成立するから、コンデンサーの容量は $C' = \frac{1}{2} C$ である。よって、極板間隔は $2d$ になり、 $2 \cdots [9]$ である。次に、極板の距離を $3d$ にするから、コンデンサーに蓄えられる電気量は $Q' = \frac{C}{3} \cdot 2V = \frac{2}{3} CV$ である。この電荷で極板間隔を変えて電圧を V にするには、 $\frac{2}{3} CV = C'' V$ より、 $C'' = \frac{2}{3} C$ だから、極板間隔は $\frac{3}{2} d$ になる。よって、 $\frac{3}{2} \cdots [10]$ である。抵抗で消費されるエネルギーが無いので、電荷の移動によるエネルギーが外部からの正味の仕事に等しいから、 $\frac{1}{3} CV \cdot 2V - \frac{1}{3} CV \cdot V = \frac{1}{3} CV^2$ より、 $\frac{1}{3} \cdots [11]$ である。