

入試問題研究 第191回 2006年 北海道大学 ① 力学(ばねの単振動)

天井からつり下げたばね定数 k [N/m] の軽いつる巻ばねの先に質量 m [kg] のうすい板が固定されている。鉛直下向きに x 軸をとり、ばねが自然長のときの板の位置を原点とする。また、重力加速度を g [m/s²] とする。

問1 図1(a)のように板が静止しているとき、
板の位置は [m] であり、重力による板の位置エネルギーとばねの弾性エネルギーの和は [J] である。ただし、位置エネルギーは原点を基準とする。

問2 図1(a)のように静止した板に質量 $2m$ [kg] の小さなおもりを置き、静かに手を離すと、図1(b)のようにおもりと板は一体となり単振動をはじめた。振動の中心では力が釣りあうことから、振動の中心の位置は [m] であり、振幅は [m] である。また、周期は [s] である。

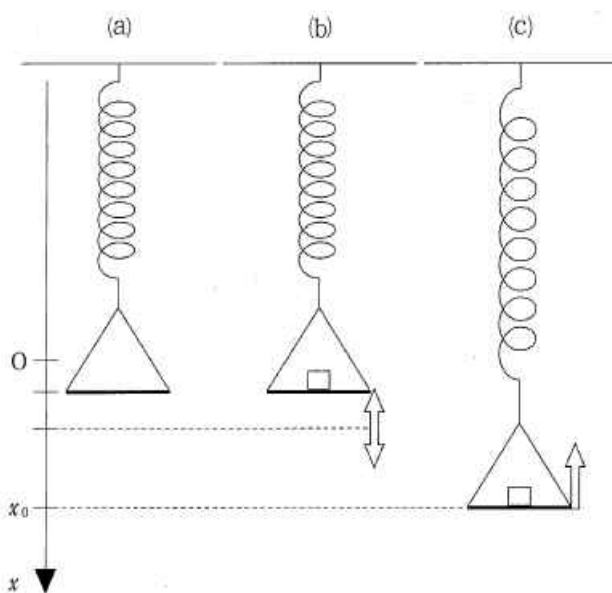


図1

問3 板に問2と同じおもりを置き、図1(c)のように x_0 [m] まで引き下げて静止させた後に静かに離すと、おもりと板は一体となり上昇し始めた。上昇途中でおもりは板から離れ、重力による減速を受けながら上昇し続け、速度が0となったところで最高点に達した。おもりと板が一体となって上昇する間、板の位置が x [m] のときの下向きの加速度を a [m/s²]、おもりが板から受ける垂直抗力の大きさを N [N] とする。

おもりと板の運動方程式は、それぞれ、以下のように与えられる。

おもり: $2ma =$

板: $ma =$

おもりが板から離れる瞬間の板の位置は [m] である。おもりが到達する最高点の位置は [m] である。実際におもりが板から離れて運動するためには、 $x_0 >$ [m] でなければならない。

入試問題研究 第191回 2006年 北海道大学 ①力学 解答・解説

問1 図1(a)のように板が静止しているとき、板の位置を x とする。板に働く力のつりあいを考え

ると $mg - kx = 0$ が成立する。よって $x = \frac{mg}{k}$ だから、板の位置は $x = \frac{mg}{k} \cdots (1)$ [m]

である。また、重力による板の位置エネルギーは $-\frac{m^2 g^2}{k}$ 、ばねの弾性エネルギーは

$\frac{m^2 g^2}{2k}$ であるので、両者の和は $-\frac{m^2 g^2}{2k} \cdots (2)$ [J] である。

問2 振動の中心では力がつりあうことから、 $-kx_c + 3mg = 0$ だから振動の中心の位置は

$x_c = \frac{3mg}{k} \cdots (3)$ [m] である。振幅は $A = \frac{3mg}{k} - \frac{mg}{k} = \frac{2mg}{k} \cdots (4)$ [m] である。ま

た、周期¹は $2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \cdots (5)$ [s] である。

問3 おもりと板が一体となって上昇する間、板の位置が x [m] のときの下向きの加速度を a [m/s²]、おもりが板から受ける垂直抗力の大きさを N [N] とすると、おもりの運動方程式は

$2ma = 2mg - N \cdots (6)$ 板の運動方程式は $ma = -kx + N + mg \cdots (7)$ になる。

片々加えて整理すると、 $3ma = -kx + 3mg$ となり $a = -\frac{k}{3m}\left(x - \frac{3mg}{k}\right) \cdots \textcircled{1}$ となり、単

振動の中心は $x = \frac{3mg}{k}$ の位置、角振動数は $\omega = \sqrt{\frac{k}{3m}}$ 、周期は $T = 2\pi\sqrt{\frac{3m}{k}}$ である。

(6)に①を代入し $-\frac{2k}{3}\left(x - \frac{3mg}{k}\right) = 2mg - N$ だから $N = \frac{2k}{3}\left(x - \frac{3mg}{k}\right) + 2mg$ である。

おもりが板から離れる瞬間は垂直抗力 $N = 0$ より、板の位置は $x = 0 \cdots (8)$ [m] だ。

この位置から、おもりの運動は鉛直投げ上げ運動に変わるので、そのときの初速度を求める。

中心からのずれ x 、速度 v 、振幅 A の関係式 $x^2 + \left(\frac{v}{\omega}\right)^2 = A^2$ より $v = \omega\sqrt{A^2 - x^2}$ である。お

もりの初速度は $v = \sqrt{\frac{k}{3m}}\sqrt{\left(x_0 - \frac{3mg}{k}\right)^2 - \left(0 - \frac{3mg}{k}\right)^2} \cdots \textcircled{2}$ である。

最高点の位置を $x = 0$ よりの高さ h とする(上向き正)。初速度②を等加速度運動の公式

$v^2 - v_0^2 = 2ax$ に代入すると、 $\frac{k}{3m}\left\{\left(x_0 - \frac{3mg}{k}\right)^2 - \left(0 - \frac{3mg}{k}\right)^2\right\} = 2gh$ が得られる。よつ

て、 $h = \frac{kx_0^2}{6mg} - x_0$ だから、最高点の位置は $x = x_0 - \frac{kx_0^2}{6mg} \cdots (9)$ [m] である。実際におもり

が板から離れるには、 $x = 0$ を通過できなければならない(振幅が $\frac{3mg}{k}$ 以上)。よつて、

$x_0 - \frac{3mg}{k} > \frac{3mg}{k}$ になるから、 $x_0 > \frac{6mg}{k} \cdots (10)$ [m] でなければならない。

1 つりあいの位置より x ずれた位置での運動方程式は $ma = -k\left(x + \frac{3mg}{k}\right) + 3mg$ だから、 $a = -\frac{k}{m}x$ である。単振動の条件式 $a = -\omega^2 x$ より、単振動の角振動数は $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ になる。よつて、周期は $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ である。