入試問題研究 第192回　2006年 金沢大学 ④ ばねの単振動

図4a に示すように、大きさの無視できる小球 C に二つのばね A、B が水平につながれている。ばね A の他端は、固定した壁の壁面内の点 O につながっている。また、壁は床と垂直であり、二つのばねの伸縮する方向は壁と垂直である。ばね A、B のばね定数はそれぞれ $2k$ [N/m]、$3k$ [N/m] であり、自然長はともに L [m] である。小球 C と床との摩擦はなく、ばねの質量は無視できる。さらに、小物体 D の移動が可能な場合、床と小物体 D の摩擦は無いものとする。壁から小物体 D に向かい、点 O のある壁面からの距離が L である床上の位置を点 F とする。

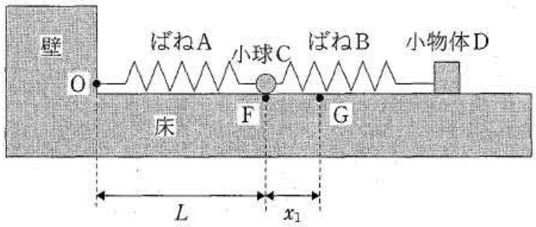

図4 a

問１ 床は水平に固定されている。

(1) 点 O と小物体 D の距離が $2L$ になるように、小物体 D の位置を固定する。床上の点 F より x_1 [m] だけ、ばね B が縮む方向に小球 C が移動した位置を点 G とする。小球 C が点 G にあるとき、小球 C に働く合力の大きさを求めよ。

(2) 小球 C を点 F に静止させた。つぎに、小球 C を振動させないように、ゆっくりと小物体 D を壁と反対方向に x_2 [m] だけ移動させた。小球 C が点 F より移動した距離を求めよ。

(3) (2)のように小物体 D を移動させるのになされた仕事を求めよ。

問２ 図4b のように、水平面と床のなす角が θ [rad] となるように床を水平から傾けた。このとき、点 O と小物体 D の距離が $2L$ になるように、小物体 D を固定している。小球 C に働く力がつりあう床上の位置を点 H とする。

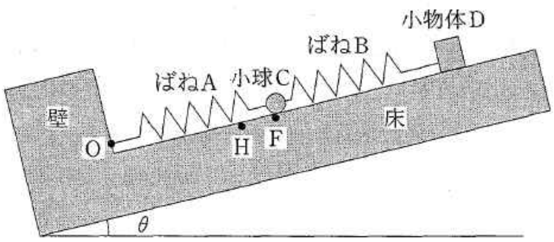

図4 b

(4) 点 F と点 H 間の距離を求めよ。

(5) 時刻 0 [s] で、小球 C は床上の点 F にあり、速さ 0 [m/s] であった。小球 C が最初に点 H を通過する時刻を求めよ。

問３ 図4c に示すように、床が水平に固定されている場合を考える。ばね A を取り外し、小物体 D を移動可能とした。ある時刻に、点 O と小物体 D の距離は $2L$ であり、小球 C の床上の位置は点 F であった。このとき、小球 C と小物体 D は一定の速さ v_0 [m/s] を持ち、ともに壁に向かって直線運動した。この後、小球 C と壁が最初に弾性衝突した時刻を 0 [s] とする。以下で考える運動において、ばねが著しく縮むことはなかったとする。

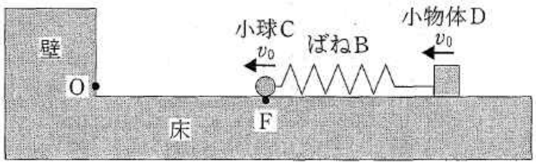

図4 c

(6) 時刻 0 [s] から、小球 C が再び壁と弾性衝突するまでの時間を考える。この時間内の時刻 t [s] における、点 O と小物体 D の距離を求めよ。

(7) 小球 C が再び壁と弾性衝突した後、点 O と小物体 D の距離が $2L$ になる時刻 T を求めよ。

入試問題研究　第192回　2006年 金沢大学 ④ ばねの単振動 解答・解説

(1) つりあい位置（点F）より x_1 [m] だけ、ばねBが縮む方向に小球Cが移動した位置（点G）での小球Cに働く合力は、ばねAから $2k\times x_1$（左向き）の力が、ばねBから $3k\times x_1$（左向き）の力が働く。よって、小球Cに働く合力の大きさはは $5kx_1$ [N] である。

(2) 小物体Dを壁と反対方向に x_2 [m] だけ移動させたとき、小球Cの位置が点Fより移動した距離を x [m] とする。このとき、ばねAの伸びは x 、ばねBの伸びは x_2-x になる。小球Cに働く2つのばねの力はつりあうので $-2kx+3k(x_2-x)=0$ が成立する。よって、小球Cの位置が点Fより移動した距離は $x=\dfrac{3}{5}x_2$ [m] である。

(3) 小物体Dを移動させるのになされた仕事は、ばねA、Bに蓄えられたエネルギーに相当する。ばねのエネルギーは、Aが $\dfrac{1}{2}\times 2k\times\left(\dfrac{3}{5}x_2\right)^2$ [J]、Bが $\dfrac{1}{2}\times 3k\times\left(\dfrac{2}{5}x_2\right)^2$ [J] だから、小物体Dを移動させるのになされた仕事は $\dfrac{3}{5}kx_2^2$ [J] である。

(4) 点Fと点H間の距離を x とする。ばねA、Bからの力と重力の斜面方向の分力でのつりあいになる。 $2kx-Mg\sin\theta+3kx=0$ が成立するから、FH間の距離 $x=\dfrac{Mg\sin\theta}{5k}$ である。

(5) 床上の点Fで小球Cは 0 [m/s] だから点Fは単振動の端である。点Hはつりあいの位置だから単振動の中心である。よって、点Hを通過する時刻は周期の4分の1後である。

つりあいの位置（H点）からわずかな距離 x 上にずれた位置での運動方程式を考える。 $Ma=2k\left(\dfrac{Mg\sin\theta}{5k}-x\right)-Mg\sin\theta+3k\left(\dfrac{Mg\sin\theta}{5k}-x\right)$ より $a=-\dfrac{5k}{M}x$ である。単振動の条件式 $a=-\omega^2x$ と比較すると、角振動数は $\omega=\sqrt{\dfrac{5k}{M}}$ になり、この単振動の周期は $T=\dfrac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\dfrac{M}{5k}}$ だ。よって、点Hを通過する時刻（4分の1周期）は $\dfrac{\pi}{2}\sqrt{\dfrac{M}{5k}}$ [s] だ。

(6) 衝突直後（時刻0[s]）の速度は、小球Cが右向きに v_0 、小物体Dが左向きに v_0 であるから両物体の重心速度はゼロになり衝突後の重心は動かない（小球Cと小物体Dは重心に対称運動）。壁面Oから x [m] 離れた位置に小球Cがあるとき、ばねの縮みは $2x$ になり、小球Cの運動方程式は $Ma=-3k\times 2x$ になり $a=-\dfrac{6k}{M}x$ より $\omega=\sqrt{\dfrac{6k}{M}}$ である。公式 $v_{max}=A\omega$ より、小球Cの振幅 A は $A=v_0\sqrt{\dfrac{M}{6k}}$ 、周期は $T=\dfrac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\dfrac{M}{6k}}$ になり、時刻 t での小球Cの位置は $x_C=v_0\sqrt{\dfrac{M}{6k}}\sin\sqrt{\dfrac{6k}{M}}t$ である。

また、重心との対称位置にあるから、小物体Dの位置は $x_D=L-v_0\sqrt{\dfrac{M}{6k}}\sin\sqrt{\dfrac{6k}{M}}t$ である。

(7) 小球Cが再び壁と弾性衝突するのは半周期 $\pi\sqrt{\dfrac{M}{6k}}$ 後で、小物体Dの位置は L である。

また、両物体は右向きに v_0 だから、OD間が $2L$ になる時刻は $\pi\sqrt{\dfrac{M}{6k}}+\dfrac{L}{v_0}$ である。