

入試問題研究 第193回 2006年 京都大学(後) ③ 直線電流の磁界

次の文章を読んで、には適した式を、には適した数値を有効数字2桁で、それぞれの解答欄に記入せよ。

エールステッドは、導線に電流を流すと近くに磁針が振れることから、電流のまわりに磁場(磁界)が生じることを発見した。この現象を使って、直線電流が作る磁場を測る実験について考える。

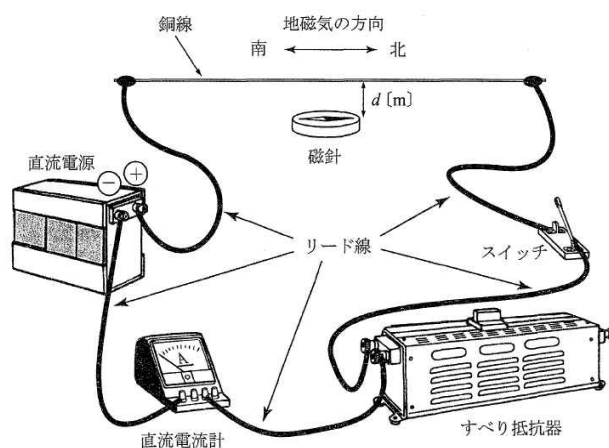


図1

- (1) 地磁気の水平方向の磁束密度 B_0 を基準として電流によって作られる磁場を測定する。図1のように南北(地磁気の方)に水平に張った銅線に直流電流を流し、その直下に磁針を置く。ただし、リード線の抵抗は無視できるとする。また、電流を流す銅線は十分長いものとし、空気の透磁率を μ_0 [N/A^2] とする。

電流で作られる磁場による磁束密度 B は、磁針の振れる角 θ の関数として、 $B =$ あ の関係が成り立つ。電流 I [A] によって距離 d [m]、で期待される磁場の強さ H を I と d を使って表すと、 $H =$ い [A/m] となる。したがって、期待される磁束密度 B は、 I と d を含む式で表すと $B =$ う [T] となる。

- (2) 次に、磁束密度を精度よく測定するために必要な、振れ角 θ の条件について考える。磁束密度 B は振れ角 θ の関数として あ で与えられる。磁束密度 B の測定誤差 ΔB は、振れ角 θ の読み取り誤差 $\Delta\theta$ だけで決まるとしよう。振れ角 θ の誤差は1度未満(小数点以下)を切り捨てて読み取ることに起因する。 B および ΔB は、表1の三角関数表を使って計算できる。磁束密度の相対誤差 $\frac{\Delta B}{B}$ が10%以内になるのは、表1の角度領域で、

θ が え 度以上になるようにしなければならない。また、 B の相対誤差は、振れ角 θ が45度になるまで減少する。そして、振れ角 θ が45度のとき、 $\frac{\Delta B}{B} \div$ お % となる。

- (3) 磁場を作るために銅線に直流を流すと、銅線は発熱する。実験を安全に行うためには、銅線の温度があまり上がらないようにしなければならない。断面が半径 r [m] の円で、長さ l [m] の銅線を用いる場合、銅線の抵抗 R は抵抗率 ρ を使って $R =$ か [Ω] と書ける。したがって、単位時間、単位長さあたりに発生するジュール熱 J は I 、 ρ 、 r を使って $J =$ き [W/m] と表される。室温付近では、電流を流すことで発生するジュール熱は、主に空気との接触で空気中に放出されるとしよう。電流を銅線に流し始めて十分に長い時間たった後に、銅線が放出する熱エネルギーは、銅線と周囲の空気との温度差と、銅線の表面積の積に比例する。その比例定数を K とおくと、温度差が ΔT [$^{\circ}\text{C}$] のとき、単位時間、単位

長さあたりに放出される熱エネルギーは [W/m] である。

図 1 のように磁針を銅線の直下、0.50 m の位置に置き、半径 2.0 mm の銅線を用いた場合、振れ角 θ を 45 度にするためには、 $\mu_0=4.0\pi\times 10^{-7}$ N/A²、 $B_0 = 3.0\times 10^{-5}$ T とすると、銅線に A の電流を流す必要がある。そのとき、電流を銅線に流し始めて十分に長い時間がたった後には、 $\Delta T =$ °C となる。ただし、銅線の抵抗率 (1.6×10^{-8} Ωm) は温度に依存しないとする。また、比例定数は実験により $K=10$ W/m と与えられている。

表 1 三角関数表

角度	cos	差分	sin	差分	tan	差分
0.0	1.000	0.000	0.000	0.017	0.000	0.017
1.0	1.000	0.000	0.017	0.017	0.017	0.017
2.0	0.999	-0.001	0.035	0.017	0.035	0.017
3.0	0.999	-0.001	0.052	0.017	0.052	0.018
4.0	0.998	-0.001	0.070	0.017	0.070	0.018
5.0	0.996	-0.002	0.087	0.017	0.087	0.018
6.0	0.995	-0.002	0.105	0.017	0.105	0.018
7.0	0.993	-0.002	0.122	0.017	0.123	0.018
8.0	0.990	-0.003	0.139	0.017	0.141	0.018
9.0	0.988	-0.003	0.156	0.017	0.158	0.018
10.0	0.985	-0.003	0.174	0.017	0.176	0.018
11.0	0.982	-0.003	0.191	0.017	0.194	0.018
12.0	0.978	-0.004	0.208	0.017	0.213	0.018
13.0	0.974	-0.004	0.225	0.017	0.231	0.018
14.0	0.970	-0.004	0.242	0.017	0.249	0.019
15.0	0.966	-0.005	0.259	0.017	0.268	0.019
16.0	0.961	-0.005	0.276	0.017	0.287	0.019
17.0	0.956	-0.005	0.292	0.017	0.306	0.019
18.0	0.951	-0.006	0.309	0.017	0.325	0.019
19.0	0.946	-0.006	0.326	0.016	0.344	0.020
20.0	0.940	-0.006	0.342	0.016	0.364	0.020
21.0	0.934	-0.006	0.358	0.016	0.384	0.020
22.0	0.927	-0.007	0.375	0.016	0.404	0.020
23.0	0.921	-0.007	0.391	0.016	0.424	0.021
24.0	0.914	-0.007	0.407	0.016	0.445	0.021
25.0	0.906	-0.008	0.423	0.016	0.466	0.021
26.0	0.899	-0.008	0.438	0.016	0.488	0.022
27.0	0.891	-0.008	0.454	0.015	0.510	0.022
28.0	0.883	-0.008	0.469	0.015	0.532	0.023
29.0	0.875	-0.009	0.485	0.015	0.554	0.023
30.0	0.866	-0.009	0.500	0.015	0.577	0.024
31.0	0.857	-0.009	0.515	0.015	0.601	0.024
32.0	0.848	-0.009	0.530	0.015	0.625	0.025
33.0	0.839	-0.010	0.545	0.015	0.649	0.025
34.0	0.829	-0.010	0.559	0.014	0.675	0.026
35.0	0.819	-0.010	0.574	0.014	0.700	0.026
36.0	0.809	-0.010	0.588	0.014	0.727	0.027
37.0	0.799	-0.011	0.602	0.014	0.754	0.028
38.0	0.788	-0.011	0.616	0.014	0.781	0.028
39.0	0.777	-0.011	0.629	0.013	0.810	0.029
40.0	0.766	-0.011	0.643	0.013	0.839	0.030
41.0	0.755	-0.012	0.656	0.013	0.869	0.031
42.0	0.743	-0.012	0.669	0.013	0.900	0.032
43.0	0.731	-0.012	0.682	0.013	0.933	0.033
44.0	0.719	-0.012	0.695	0.012	0.966	0.034
45.0	0.707	-0.012	0.707	0.012	1.000	0.036
46.0	0.695	-0.013	0.719	0.012	1.036	0.037
47.0	0.682	-0.013	0.731	0.012	1.072	0.038
48.0	0.669	-0.013	0.743	0.012	1.111	0.040
49.0	0.656	-0.013	0.755	0.011	1.150	0.041
50.0	0.643	-0.013	0.766	0.011	1.192	0.043

※差分は、隣接するそれぞれの三角関数の値の差を表している。
例えば、 $\sin 30^\circ - \sin 29^\circ = 0.015$ 。ただし、表中の差分の値が
表中の三角関数の値の差と異なるのは四捨五入の影響による。

入試問題研究 第193回 2006年 京都大学(後) ③ 直線電流の磁界 解答・解説

(1) 電流で作られる磁場による磁束密度 B は、 $B=B_0 \tan \theta$ … あ の関係が成り立つ。電流

I [A] によって距離 d [m] のとき、磁場の強さは $H=\frac{I}{2\pi d}$ … い [A/m] となる。したがっ

て、磁束密度は $B=\mu_0 H=\frac{\mu_0 I}{2\pi d}$ … う [T] となる。※ このあたりは公式通りの小手調べだ！

(2) ※ **ここからが勝負！** 次に、磁束密度を精度よく測定するために必要な、振れ角 θ の条件について考える。磁束密度 B は $B=B_0 \tan \theta$ だから、磁束密度 B の測定誤差 ΔB は、振れ角 θ の測定で1度未満(小数点以下)を切り捨てることで生じると問題文中に書いてある。よって $B_0 \tan \theta \leq B < B_0 \tan(\theta+1)$ が成立し $\Delta B < B_0 (\tan(\theta+1) - \tan \theta)$ である。

磁束密度の相対誤差は $\frac{\Delta B}{B} = \frac{\tan(\theta+1) - \tan \theta}{\tan \theta}$ だから $\frac{\tan(\theta+1) - \tan \theta}{\tan \theta} < 0.10$ の条件である。表1より、 $\theta > 11$ … え 度以上であれば良いことがわかる。

B の相対誤差は、振れ角 θ が45度になるまで減少し(三角関数表を見れば分かる!)、振れ角 θ が45度のとき、 $\frac{\Delta B}{B} = 0.036$ だから、 $3.6 \cdots$ お % である。

(3) **抵抗の公式** $R=\rho \cdot \frac{l}{S}$ を使っただけ！ 銅線の断面が半径 r [m] の円で、長さ l [m] の場合、

銅線の抵抗 $R=\frac{\rho l}{\pi r^2}$ … か [Ω] と書ける。ジュール熱の公式は $Q=I^2 r t$ だから、単位時

間、単位長さあたりに発生するジュール熱は $J=\frac{\rho I^2}{\pi r^2}$ … き [W/m] と表される。

※ **ここからが勝負！** 銅線が放出する熱エネルギーは、銅線と周囲の空気との温度差 ΔT と、銅線の表面積の積 S に比例するから、その比例定数を K とするから、単位時間あたりに放出される熱エネルギーは $Q'=K S \cdot \Delta T = K \cdot 2\pi r l \cdot \Delta T$ と表すことができる。よって単位時間、単位長さあたりに放出される熱エネルギーは $\frac{Q'}{l}$ だから、 $2\pi K r \Delta T \cdots$ く [W/m] だ。

十分時間が経つと熱量の出入りがつりあう(ジュール熱=放出熱)。よって $J=2\pi K r \Delta T$ が成立するから $2\pi K r \Delta T = \frac{\rho I^2}{\pi r^2}$ より、そのときの電流は $I = \sqrt{\frac{2\pi^2 K r^3 \Delta T}{\rho}} \cdots$ ① だ。

半径 2.0 mm の銅線の直下 0.50 m の位置に磁針を置いたとき、振れ角 θ が45度だから $\frac{\mu_0 I}{2\pi d} = B_0 \tan 45^\circ$ より $I = \frac{2\pi d B_0}{\mu_0}$ が成立する。この式に数値を代入し計算すると

$$I = \frac{2\pi d B_0}{\mu_0} = \frac{2 \times 3.14 \times 0.50 \times (3.0 \times 10^{-5})}{4.0 \times 3.14 \times 10^{-7}} = 75 \text{ より、そのときの電流は } 75 \cdots \text{ け A だ。}$$

電流を銅線に流し始めて十分に長い時間がたった後では式①が成立し、空気と銅線の温度差は $\Delta T = \frac{75^2 \rho}{2\pi^2 K r^3}$ である。よって、 $\Delta T = \frac{75^2 \times (1.6 \times 10^{-8})}{2 \times 3.14^2 \times 10 \times (2.0 \times 10^{-3})^3} = 57.05 \cdots$ となるので、空気と銅線の温度差は $\Delta T = 57 \cdots$ こ $^\circ\text{C}$ である。※ 触ればやけどする温度だ！