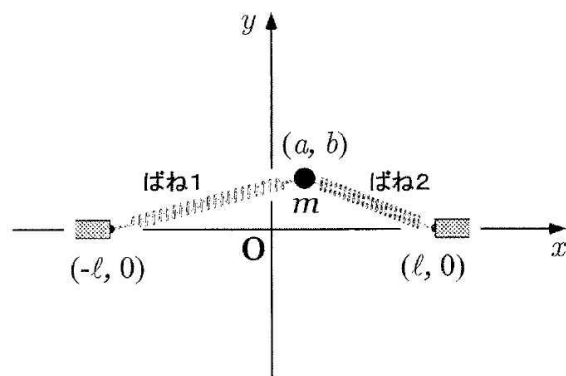


入試問題研究 第194回 2006年 大阪大学(後) ① ばねの単振動

[1] 水平な台の上に大きさの無視できる質量 m

の小物体を置き、自然長が l_0 の軽くて細い
2本のばね、ばね1、ばね2をその小物体に
つないだ。台の表面には (x, y) 座標が設定さ
れており、小物体とつながれていない方のばね
の端点は、それぞれ点 $(-l, y)$ 、点 (l, y) で
台に固定されている。ただし、 $l_0 < l$ とする。こ
れらのばねのばね定数はともに k であり、これ



らのばねは曲がることはなく、固定点のまわりに自由に動くことが出来る。また、台と小物体、台
とばねとの間の摩擦はいずれも無視できる。最初は、小物体を点 (a, b) ($a > 0$ 、 $b > 0$) に
固定している。図はこの状況を台の上方から見たときの様子である。

以下では、 a 、 b がともに l および $l - l_0$ に比べて十分小さい場合を考えよう。このとき、ば
ね1の長さ L_1 とその逆数 $\frac{1}{L_1}$ 、および、ばね2の長さ L_2 とその逆数 $\frac{1}{L_2}$ は、以下に

示すように、 a 、 b の一時式でよく近似される。上の条件が成り立つ場合、 $\frac{a}{l}$ と $\frac{b}{l}$ の絶対

値は1と比べて十分小さいので、 $\frac{a^2}{l^2}$ と $\frac{b^2}{l^2}$ は、 $\frac{a}{l}$ の絶対値と比べて十分小さい。その

ため、 L_1 は、 $L_1 = \sqrt{(l+a)^2 + b^2} = l \sqrt{1 + \frac{2a}{l} + \frac{a^2 + b^2}{l^2}} \approx l \sqrt{1 + \frac{2a}{l}}$ のように近似される。

また、 x の絶対値が1に比べて十分小さい場合は、 $(1+x)^p \approx 1 + px$ (p は実数) の近
似がよく成り立つので、 L_1 はさらに $L_1 \approx l \sqrt{1 + \frac{2a}{l}} \approx l \left(1 + \frac{a}{l}\right)$ のように近似される。

同様にして、 $\frac{1}{L_1}$ も、 $\frac{1}{L_1} \approx \frac{1}{l \left(1 + \frac{a}{l}\right)} \approx \frac{1}{l} \left(1 - \frac{a}{l}\right)$ のように近似できる。

【注意】 以下の問1、問2、問3における近似計算では、 a 、 b の積や、 a 、 b の二次とそれより大きい次数
の項は無視し、 a 、 b の一次の項までだけを残す近似を用いよ。問1、問2、問3の結果は a 、 b の一次多
項式で表せ。

問1 ばね1の自然長からの伸びを求めよ。解答は l 、 l_0 、 a 、 b のうち必要なものを用いて
記せ。

問2 ばね1が小物体におよぼす力の、 x 成分と y 成分を、それぞれ求めよ。力の向きは、 x 、 y
の正の向きをそれぞれ正の向きとする。解答は k 、 l 、 l_0 、 a 、 b のうち必要なものを用

いて記せ。

問3 ばね1とばね2が小物体におよぼす力の合力の、 x 成分と y 成分を、それぞれ求めよ。解答は k 、 l 、 l_0 、 a 、 b のうち必要なものを用いて記せ。

問4 時刻 $t=0$ に、点 (a, b) ($a>0$ 、 $b>0$) において固定していた小物体を、静かにはなした。問3で求めた小物体にはたらく力から得られる運動方程式によると、この後の小物体の x 方向、 y 方向の運動は、それぞれ振幅 a 、 b の独立な単振動であることがわかる。

一方、 x 方向、 y 方向に独立な単振動を行う小物体の、時刻 t における位置 (x, y) は、定数 $A, B, \omega_x, \omega_y, \alpha, \beta$ を用いて、一般に $x=A\cos(\omega_x t+\alpha)$ 、 $y=A\cos(\omega_y t+\beta)$ と表される。ただし、 $A>0, B>0, 0\leq\alpha<2\pi, 0\leq\beta<2\pi$ であり、 ω_x, ω_y は、それぞれ x 方向、 y 方向単振動の角振動数である。

(1) 時刻 $t=0$ に、点 (a, b) において静かにはなした小物体が、それ以降に行う運動に対して、 $A, B, \omega_x, \omega_y, \alpha, \beta$ をそれぞれ求めよ。 A, B, ω_x, ω_y については、 k, m, l, l_0, a, b のうち必要なものを用いて記せ。また、 α, β については、適切な実数で記せ。

(2) 上で求めた x, y の表式から t を消去することにより、小物体が台の上で描く軌跡を表す方程式を求めることができる。 $l=\frac{4}{3}l_0$ である場合に、その軌跡を現す方程式を求めよ。解答は、 x, y の他に、 k, m, l, l_0, a, b のうち必要なものを用いて記せ。

(3) $l=\frac{4}{3}l_0$ である場合に、小物体が台の上で描く軌跡を、解答用紙のグラフ用紙に描け。

入試問題研究 第194回 2006年 大阪大学(後) ① ばねの単振動 解答・解説

問1 ばね1の長さは $l_1 = \sqrt{(a+l)^2 + b^2}$ である。 $l_1 = l \sqrt{1 + \frac{2a}{l} + \frac{a^2}{l^2}}$ であるから、近似式を適

用して $l_1 = l \left(1 + \frac{a}{l} \right)$ である。よって、自然長からの伸びは $x_1 = l_1 - l_0 = l \left(1 + \frac{a}{l} \right) - l_0$ だから、 $x = l + a - l_0$ と表すことができる。

問2 ばね1の力は、フックの法則 $f = kx$ に代入して $f_1 = -k(l + a - l_0)$ である。

問3 問2のばね1の力を分解すると、 x 成分は $f_x = -\frac{f(l+a)}{l_1}$ 、 y 成分は $f_y = -\frac{fb}{l_1}$ だ。

また、 $\frac{1}{l'} = \frac{1}{l} \left(1 - \frac{a}{l} \right) = \frac{l-a}{l^2}$ であるから、ばね1の力の x 成分は $f_{1x} = -k(l + a - l_0)$ 、 y 成分は $f_{1y} = -\frac{k(l + a - l_0)b}{l}$ である。一方、ばね2の長さは $l_2 = \sqrt{(a-l)^2 + b^2}$ だから、ばね2の力は $f_2 = -k(\sqrt{(a-l)^2 + b^2} - l_0)$ である。近似すると、 $f_2 = -k(l - a - l_0)$ である。よって、 x 方向成分は $f_{2x} = +k(l - a - l_0)$ 、 y 成分は $f_{2y} = \frac{k(l - a - l_0)b}{l}$ である。

問4 時刻 $t=0$ に、点 (a, b) ($a>0$ 、 $b>0$) において固定していた小物体を、静かにはなした。問3で求めた小物体にはたらく力から得られる運動方程式は、

x 方向の運動方程式: $ma = f_{1x} + f_{2x}$ より、 $ma = -2ka \cdots \textcircled{1}$ である。これは x 方向の運動が単振動運動することを示し、その角振動数は $\omega_x = \sqrt{\frac{2k}{m}}$ である。

y 方向の運動方程式: $ma = f_{1y} + f_{2y}$ より、 $ma = -2k \left(\frac{l-l_0}{l} \right) b \cdots \textcircled{2}$ である。これは y 方向の運動が単振動運動することを示し、その角振動数は $\omega_y = \sqrt{\frac{2k(l-l_0)}{ml}}$ である。

※ 小物体の x 方向、 y 方向の運動は、それぞれ振幅 a 、 b の独立な単振動である /

(1) $A=a$ 、 $B=b$ 、 $\omega_x = \sqrt{\frac{2k}{m}}$ 、 $\omega_y = \sqrt{\frac{2k(l-l_0)}{ml}}$ 、 $\alpha=0$ 、 $\beta=0$ である¹。

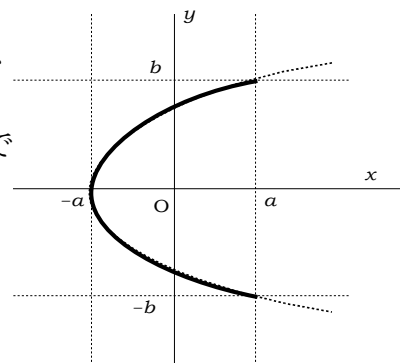
(2) $l = \frac{4}{3}l_0$ より $\omega_y = \frac{1}{2}\omega_x$ である。またこの運動は $x = a \cos \omega_x t$ 、 $y = b \cos \frac{1}{2}\omega_x t$ と表

せる。半角公式 $\cos^2 \frac{1}{2}\theta = \frac{1+\cos \theta}{2}$ を用いて整理すると、

$$\left(\frac{y}{b} \right)^2 = \cos^2 \frac{1}{2}\omega_x t = \frac{1+\cos \omega_x t}{2} \text{ より } 2 \left(\frac{y}{b} \right)^2 = 1 + \left(\frac{x}{a} \right) \text{ で}$$

ある。よってその軌跡は $x = \frac{2a}{b^2}y^2 - a$ の放物線(の1部)。

(3) 物体が台の上で描く軌跡を表すグラフは右図。



1 時刻ゼロで、速度がゼロだから、単振動の端 ($\cos \omega t = \pm 1$ のとき) である。よって、そのときの位置が最大変位(振幅に一致する)に相当する。この場合はともに正の変位だから、 $\alpha=0$ 、 $\beta=0$ である。