

入試問題研究 第195回 2006年 東北大学(後) ② コイル

[2] 図1のように、導線が円筒状に密に巻かれたコイル

はソレノイドと呼ばれる。ソレノイドの長さは半径に比べて十分長いものとする。ソレノイドは図のような方向に電流 i を流すと、単位長さあたりの巻き数 n のソレノイド内部には、強さが ni の一様な磁場(磁界) H が図の z 軸正方向に発生する。真空の透磁率 μ_0 として以下の問いに答えよ。ただし、ソレノイドの外側の磁場は無視できるものとする。また、ソレノイドの抵抗は無視し、ソレノイドの両端の電圧 V の正の向きを図のように定義する。解答は、答案紙の所定の場所に記入せよ。

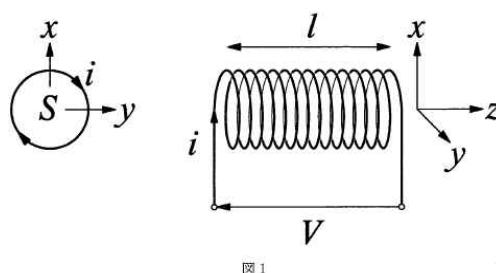


図1

- (1) ソレノイドの断面積を S 、長さを l 、全巻き数を N ($N = nl$) とする。以下の文の (イ) から (ホ) を適切な式で埋めよ。ただし、 μ_0 、 S 、 l 、 N 、 H と、以下の文で定義される記号 (Φ 、 $\Delta\Phi$ 、 Δt 、 I 、 L) の中から必要なものを用いること。

ソレノイド内部を図の z 軸正方向に貫く磁束 Φ が、時間 Δt の間に $\Delta\Phi$ 変化すると、ソレノイドの両端に誘導起電力 $V = \text{(イ)}$ が生じる。ソレノイドに流れる電流 i が時間変化するとき、ソレノイド内部の磁場も時間変化する。 Φ は、磁場 H を用いて $\Phi = \text{(ロ)}$ と書けるので、 Δt の間に電流が Δi 増加したとき、 $V = - \text{(ハ)} \frac{\Delta i}{\Delta t}$ となる。

一方、ソレノイドの自己インダクタンスを L とすると、誘導起電力は $V = -L \frac{\Delta i}{\Delta t}$ なので、

$L = \text{(ハ)}$ と求められる。

ソレノイドに生じる誘導起電力に逆らって、電流を 0 から I まで増加させるのに電池がする仕事は、ソレノイドに蓄えられるエネルギー U に等しい。 U は L と I を用いると $U = \text{(ニ)}$ と書ける。ソレノイドに電流 I が流れているときに発生する磁場 H を用いて I を書き換えると、この式は $U = \text{(ホ)} lS$ と変形できる。 U がソレノイド内部の磁場のもつエネルギーと見なせる。

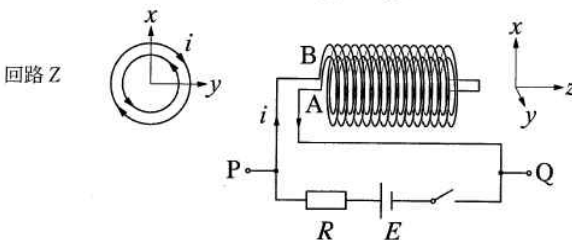
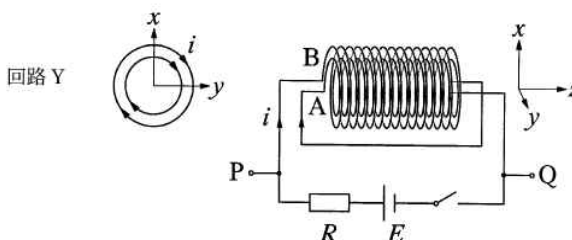
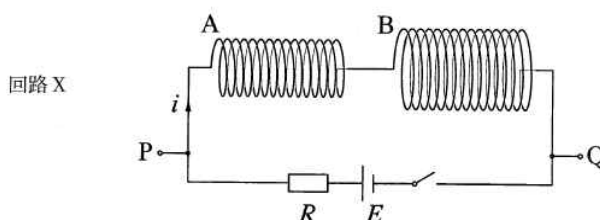


図2

- (2) 問 (1) の応用として、長さ l 、全巻数 N は共通で、断面積の異なる2つのソレノイド A、B が接続された場合を考える。ソレノイド A の断面積を S 、ソレノイド B の断面積を αS (ただし、 $\alpha > 1$) とし、導線は同じ方向に巻いてあるとする。これら2つのソレノイドを直列に接続

したソレノイド対と呼ぶ。ソレノイド対と電池、抵抗、スイッチを接続した図 2 の回路 X、Y、Z について考察する。電池の起電力を E とし、内部抵抗は無視できるとする。抵抗の抵抗値は R とする。回路 X では、ソレノイド A と B は十分に離れており、互いに相手のソレノイドが作る磁場の影響は受けないものとする。回路 Y と回路 Z では、ソレノイド A をソレノイド B の中に、互いの中心軸が平行で、両ソレノイドの端が一致するように挿入し、固定する。このとき互いのソレノイドの導線は接触しないものとする。図 2 のように、回路 Y では、ソレノイド A とソレノイド B の電流の向きが同じで、回路 Z では互いに電流が逆向きになっている。これらの回路において、スイッチを閉じて十分に時間が経過し、一定の電流が流れている状態を定常状態とよぶ。以下の問いに答えよ。なお、解答は結果だけでなく、考え方や計算の過程も記せ。

(a) 定常状態にあるとき、回路 Y と Z で、ソレノイド A の内部の磁場の強さ H_A と、ソレノイド A と B とにはさまれた部分の磁場の強さ H_{AB} を μ_0 、 α 、 N 、 S 、 l 、 E 、 R の中から必要なものを用いて表せ。

(b) 電流 i が時間 Δt 間に Δi 増加したとき、回路 X、Y、Z の点 P と Q の間に生じる誘導起電力 V を μ_0 、 α 、 N 、 S 、 l 、 Δi 、 Δt の中から必要なものを用いて表せ。

(c) X、Y、Z の回路で、同時にスイッチを閉じて電流を流した。スイッチを閉じた時刻を 0 とするとき、それぞれの回路が定常状態になるまでの電流の時間変化を表すグラフとして、図 3 の (カ) ~ (ケ) の 4 つのグラフから適切なものを選び。またグラフの曲線 a、b、c が、X、Y、Z のどの回路に流れる電流を表すか答えよ。

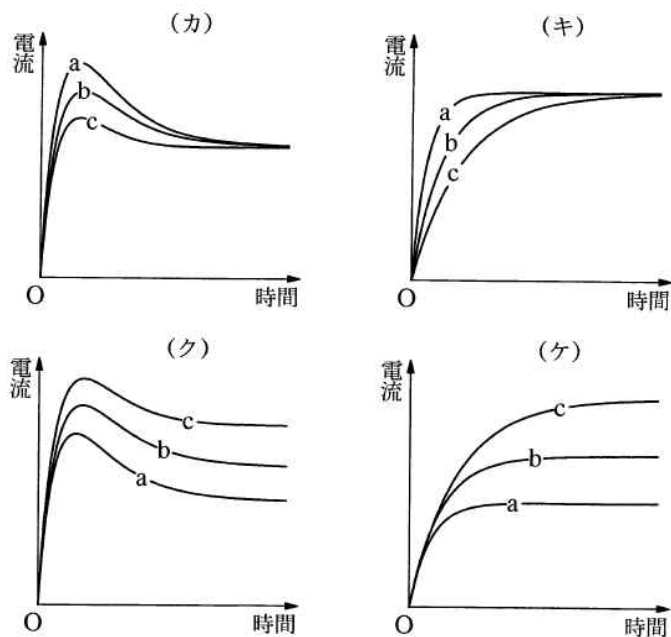


図 3

(d) 定常状態にあるとき、回路 Y のソレノイド対に蓄えられるエネルギーを U_Y 、回路 Z のソレノイド対に蓄えられるエネルギー U_Z とする。

$$\frac{U_Y}{U_Z} = \frac{\alpha+3}{\alpha-1} \text{ を導け。}$$

入試問題研究 第195回 2006年 東北大学(後) ② コイル

- (1) ソレノイドの誘導起電力 $V = N \frac{\Delta \Phi}{\Delta t}$... イが生じる。ソレノイドの内部に出来る磁界は

$H = \frac{N}{l} I$ であり、コイルを貫く磁束は $\Phi = \mu_0 H S \dots$ ロと書ける。 Δt 間に電流が Δi 増

加したとき、誘導起電力 $V = N \cdot \mu_0 \frac{N \Delta I}{l \Delta t} \cdot S = \frac{\mu_0 N^2 S}{l} \cdot \frac{\Delta I}{\Delta t}$ となり $L = \frac{\mu_0 N^2 S}{l} \dots$ ハである。
※ これが「ソレノイドの自己インダクタンス」に相当する。

ソレノイドに生じる誘導起電力 $V = -L \frac{\Delta I}{\Delta t}$ に逆らって、電流を0から I まで増加させるのに電池がする仕事は $U = \int \left(L \frac{dI}{dt} \right) I dt = \int_0^I L I dI = \frac{1}{2} L I^2 \dots$ ニである。ソレノイドに電

流 I が流れているときに発生する磁場 $H = \frac{N}{l} I$ を用いて I を書き換えると、ニの式は

$$U = \frac{1}{2} L \left(\frac{H l}{N} \right)^2 = \frac{\mu_0 N^2 S}{l} \cdot \frac{H^2 l^2}{2 N^2} \text{ であるから } U = \frac{\mu_0 H^2}{2} \cdot S l \text{ より } \frac{1}{2} \mu_0 H^2 \dots \text{ ホ である。}$$

- (2) 定常状態にあるときにコイルに流れる電流は $I = \frac{E}{R}$ である。**※ 各ソレノイドで発生する磁界の向きに注意して、ソレノイドA内部の磁界はソレノイドA、Bによる磁界を合成すればよい。**

(a) 回路Y: $H_A = \frac{N}{l} \cdot \frac{E}{R} + \frac{N}{l} \cdot \frac{E}{R} = \frac{2NE}{lR}$ 、 $H_{AB} = \frac{N}{l} \cdot \frac{E}{R} = \frac{NE}{lR}$

※ Aの内部は2つのソレノイドが作る磁界の向きが同じなので2つ磁界の強さの和!

回路Z: $H_A = \frac{N}{l} \cdot \frac{E}{R} - \frac{N}{l} \cdot \frac{E}{R} = 0$ 、 $H_{AB} = \frac{N}{l} \cdot \frac{E}{R} = \frac{NE}{lR}$

※ Aの内部は2つのソレノイドが作る磁界の向きが逆なので2つ磁界の強さの差!

- (b) 回路X: 磁束の変化は $\Delta \Phi_A = \frac{\mu_0 N S \Delta i}{l}$ 、 $\Delta \Phi_B = \frac{\mu_0 N \alpha S \Delta i}{l}$ である。

$K = \frac{\mu_0 N^2 S}{l}$ とすると、電磁誘導の法則より $V_A = -K \cdot \frac{\Delta i}{\Delta t}$ 、 $V_B = -\alpha K \cdot \frac{\Delta i}{\Delta t}$ である。

$V_X = V_A + V_B$ だから $V_X = -(\alpha + 1) K \cdot \frac{\Delta i}{\Delta t}$ より $V_X = -\frac{\mu_0 (\alpha + 1) N^2 S}{l} \cdot \frac{\Delta i}{\Delta t}$ である。

回路Y: 磁束の変化は $\Delta \Phi_A = \frac{2\mu_0 N S \Delta i}{l}$ 、 $\Delta \Phi_B = \frac{2\mu_0 N S \Delta i}{l} + \frac{\mu_0 N (\alpha - 1) S \Delta i}{l}$

だから、 $V_A = -2K \cdot \frac{\Delta i}{\Delta t}$ 、 $V_B = -2K \cdot \frac{\Delta i}{\Delta t} - (\alpha - 1) K \cdot \frac{\Delta i}{\Delta t}$ である。

$V_Y = V_A + V_B$ だから、 $V_Y = -(\alpha + 3) K \cdot \frac{\Delta i}{\Delta t}$ より $V_Y = -\frac{\mu_0 (\alpha + 3) N^2 S}{l} \cdot \frac{\Delta i}{\Delta t}$ である。

回路Z: 磁束の変化は $\Delta \Phi_A = 0$ 、 $\Delta \Phi_B = \frac{\mu_0 N (\alpha - 1) S \Delta i}{l}$ だから、それぞれの誘導起

電力は $V_A = 0$ 、 $V_B = -(\alpha - 1) K \cdot \frac{\Delta i}{\Delta t}$ である。

$$V_Z = V_B - V_A \text{ だから } V_Z = -(\alpha - 1)K \cdot \frac{\Delta i}{\Delta t} \text{ より、 } V_Z = -\frac{\mu_0(\alpha - 1)N^2 S}{l} \cdot \frac{\Delta i}{\Delta t} \text{ である。}$$

(c) (b)の結果から、ソレノイド対 X、Y、Z の合成インダクタンスを考えよう。

$$\text{ソレノイド対 X の合成インダクタンスは } L_X = \frac{\mu_0(\alpha + 1)N^2 S}{l} \text{ であり、}$$

$$\text{ソレノイド対 Y の合成インダクタンスは } L_Y = \frac{\mu_0(\alpha + 3)N^2 S}{l} \text{ であり、}$$

$$\text{ソレノイド対 Z の合成インダクタンスは } L_Z = \frac{\mu_0(\alpha - 1)N^2 S}{l} \text{ である。}$$

以上より、各合成インダクタンスの大きさには $L_Y > L_X > L_Z$ の関係が成立している。

同時にスイッチを閉じて電流を流した場合

① 定常状態になるまでにインダクタンスが大きいほど時間がかかり、その間の電流の変化は単調関数 $I = I_0(1 - e^{-kt})$ になること(後述)。

② 定常状態の電流値は $\frac{E}{R}$ であること。

以上のことから、電流の時間変化を表すグラフとして、図 3 の(キ)である。

また、グラフのそれぞれの曲線は、a: 回路 Z、b: 回路 X、c: 回路 Y である。

(d) ソレノイドのエネルギーの公式 $U = \frac{1}{2}LI^2$ より、定常状態にあるとき、ソレノイド対に蓄え

$$\text{られるエネルギーは } U_Y = \frac{1}{2}L_Y\left(\frac{E}{R}\right)^2, \quad U_Z = \frac{1}{2}L_Z\left(\frac{E}{R}\right)^2 \text{ より } \frac{U_Y}{U_Z} = \frac{L_Y}{L_Z} \text{ である。したがっ}$$

$$\text{て、 } L_Y = \frac{\mu_0(\alpha + 3)N^2 S}{l}, \quad L_Z = \frac{\mu_0(\alpha - 1)N^2 S}{l} \text{ であるので } \frac{U_Y}{U_Z} = \frac{\alpha + 3}{\alpha - 1} \text{ が成立する。}$$

【参考】コイルに流れる電流を微分方程式を使って説明してみよう。

電圧 E [V] の電池に抵抗値 R [Ω] の抵抗とインダクタンス L [H] のコイルを直列に接続したときを考える。時刻 t [s] のとき、電流が I [A] であるとする。 Δt [s] の電流値が $I + \Delta I$ [A] に変化したとする。コイルの逆起電力が $V_L = -L \frac{\Delta I}{\Delta t}$ だから、オームの法則より $E - L \frac{\Delta I}{\Delta t} = IR$ が

成立する。 Δt を 0 にする極限をとると、 $E - L \frac{dI}{dt} = IR$ の微分方程式が得られる。

$$L \frac{dI}{dt} = E - IR \text{ だから、変数分離すると } \frac{dI}{E - IR} = \frac{1}{L} dt \text{ だから } \int \frac{dI}{E - IR} = \int \frac{1}{L} dt \text{ となる}$$

ので、両辺積分して $-\log_e |E - IR| = \frac{t}{L} + C$ (C は積分定数) が得られる。指数関数で表現する

と $E - IR = \pm e^{-\frac{t}{L} - C}$ である。初期条件 ($t = 0$ のとき $I = 0$) を適用して $E = \pm e^{-C}$ である。

以上より、積分定数 C を消去して $E - IR = E e^{-\frac{t}{L}}$ である。よって、スイッチを入れてからコイル

に流れる電流の変化の関数が $I = \frac{E}{R}(1 - e^{-\frac{1}{L}t})$ であることが導かれた。