

入試問題研究 第20回 2004年 慶応大学 理工 ② 力学 (落下運動・衝突)

図1のように、水平な床に深さ L 、幅 L のみぞがある。みぞの内側の向かい合う壁面は、なめらかな鉛直面で、互いに平行である。また、みぞの底面はなめらかな水平面である。左側の壁面の上端 A 点から小球を打ち出し、右側の壁面の上端 B 点に到達させることを考える。ただし、A 点と B 点の距離は L であり、小球は A 点と B 点を含む鉛直面内を運動するものとする。重力加速度を g とする。以下の文章中の空欄に適切な数式を記入しなさい。

(1) まず、小球と壁面および底面との衝突が完全弾性衝突である場合を考える。

(i) 図2(a)のように、小球を A 点から水平方向に速さ v_0 で打ち出したところ、左右の壁面に衝突することなく底面に一度だけ衝突してから、B 点に到達した。小球が A 点から打ち出されてから B 点に到達するまでの時間は t_0 であった。時間 t_0 と速さ v_0 は、 g と L を用いて、それぞれ $t_0 = \boxed{\text{ア}}$ 、 $v_0 = \boxed{\text{イ}}$ と表される。

(ii) 次に、図2(b)のように、小球を A 点から水平方向に速さ v_1 で打ち出したところ、右の壁面、底面、左の壁面の順に一度ずつ衝突してから、B 点に到達した。速さ v_1 は(1)(i)のときの v_0 を用いて $v_1 = \boxed{\text{ウ}}$ と表される。

(2) 以下では、小球と壁面の衝突が完全弾性衝突であり、小球と底面の衝突が反発係数 e の非弾性衝突である場合を考える。

(i) 図2(b)のように、小球を A 点から水平方向に(1)(ii)のときと同じ速さ v_1 で打ち出したところ、右の壁面、底面、左の壁面の順に一度ずつ衝突した後、右の壁面に達する前に底面に衝突した。このとき、反発係数 e は $\boxed{\text{エ}} \leq e < \boxed{\text{オ}}$ の範囲にある。また、小球が左の壁面に衝突した位置は、底面からの高さが h であった。この h は、 e と L を用いて、 $h = \boxed{\text{カ}}$ と表される。

(ii) 次に、図2(c)のように、小球を A 点から斜め下向きに打ち出したところ、左右の壁面に賞乙することなく底面に一度だけ衝突してから、B 点での小球の速度の向きは水平方向であった。小球の速度の鉛直成分の大きさは、底面に衝突した直後では g と L を用いて $\boxed{\text{キ}}$ と表され、A 点では e と g と L を用いて $\boxed{\text{ク}}$ と表される。また、小球が A 点から打ち出されてから B 点に到達するまでの時間は、 e と g と L を用いて $\boxed{\text{ケ}}$ と表される。

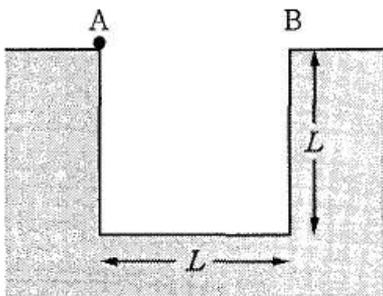


図1

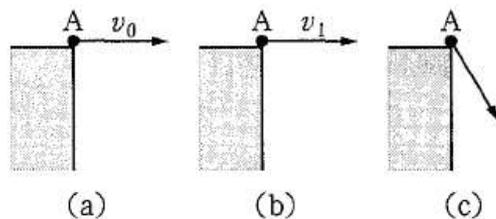


図2

入試問題研究 第20回 2004年 慶応大学 理工 ② 解答・解説

(1) 底面に落下するまでの時間は自由落下と同じだ。等加速度運動の公式 $x=v_0t+\frac{1}{2}at^2$ より

り、 $L=\frac{1}{2}gt^2$ より、落下時間は $t=\sqrt{\frac{2L}{g}}$ になる。A 点に跳ね上がる時間は落下時間と同じ

だから、A 点から B 点までの時間は $t_0=2\sqrt{\frac{2L}{g}}$ … [ア] である。その時間に水平方向の移

動距離 L より、 $v_0=L\div 2\sqrt{\frac{2L}{g}}$ の初速度になる。よって、 $v_0=\frac{\sqrt{2gL}}{4}$ … [イ] である。

次に、右の壁面、底面、左の壁面の順に衝突し、B 点に到達したときを考える。鉛直方向の動き(時間 t_0)は前問と同じだが、水平方向の移動は1往復半だから $3L$ になる。よって、水平方向の初速度は3倍になるから、 $v_1=3v_0$ … [ウ] である。

(2) 次に、底面の衝突が非弾性衝突(反発係数が e)になる場合を考える。水平方向は弾性衝突

だから速さは変わらず $v_1=3v_0=\frac{3\sqrt{2gL}}{4}$ になり、床に落下する時間は $\frac{2L}{v_1}\leq t_1<\frac{3L}{v_1}$ より、

$\frac{4\sqrt{2}}{3}\sqrt{\frac{L}{g}}\leq t_1<\frac{4\sqrt{2}}{2}\sqrt{\frac{L}{g}}$ である。A 点から床面に落ちる時間は自由落下と同じ $\sqrt{\frac{2L}{g}}$ 、

床面に衝突直前の速さは $\sqrt{2gL}$ である。衝突直後の速さは $e\sqrt{2gL}$ であり、床面で衝突して

から再び床面に落下する時間は $\frac{2e\sqrt{2gL}}{g}=2e\sqrt{\frac{2L}{g}}$ になり $t_1=\sqrt{\frac{2L}{g}}+2e\sqrt{\frac{2L}{g}}$ である。

$\frac{4\sqrt{2}}{3}\sqrt{\frac{L}{g}}\leq\sqrt{\frac{2L}{g}}+2e\sqrt{\frac{2L}{g}}<\frac{4\sqrt{2}}{2}\sqrt{\frac{L}{g}}$ より $\frac{1}{6}\leq e<\frac{1}{2}$ 。よって $\frac{1}{6}$ … [エ]、 $\frac{1}{2}$ … [オ]

水平初速度 v_1 のとき、床面に落下する位置は床面の中央であり、左の壁面までの距離は

$\frac{L}{2}$ になる。よって、床面から左の壁面に衝突するまでの時間は $\frac{L}{2}\div v_1=\frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{\frac{L}{g}}$ だから、

等加速度運動の公式 $h=e\sqrt{2gL}\cdot\frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{\frac{L}{g}}-\frac{1}{2}\cdot g\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{\frac{L}{g}}\right)^2$ より $h=\frac{(6e-1)L}{9}$ … [カ]

次に、斜め下方に打ち出したとき、床面に衝突し、直接 B 点に鉛直方向速度ゼロで達する。

等加速度運動の公式より、床面で衝突した直後の鉛直方向成分 v は $0^2-v^2=-2gL$ を

満たすから $v=\sqrt{2gL}$ … [キ] である。よって、衝突直前の速度の鉛直成分は $\frac{\sqrt{2gL}}{e}$ だ。

打ち出した初速度の鉛直方向成分を v_y とすると、公式より $\left(\frac{\sqrt{2gL}}{e}\right)^2-v_y^2=2gL$ だから、

$v_y=\frac{\sqrt{2(1-e^2)gL}}{e}$ … [ク] と表せる。A 点から床面までの時間 t_2 は等加速度運動の公

式 $\frac{\sqrt{2gL}}{e}=\frac{\sqrt{2(1-e^2)gL}}{e}+gt_2$ を満たす。よって、 $t_2=\frac{(1-\sqrt{1-e^2})\sqrt{2L}}{e\sqrt{g}}$ になり、床面から

B 点までの時間は $t=\sqrt{\frac{2L}{g}}$ 、A 点から B 点までの時間は $\frac{(1+e-\sqrt{1-e^2})\sqrt{2L}}{e\sqrt{g}}$ … [ケ]

になる。