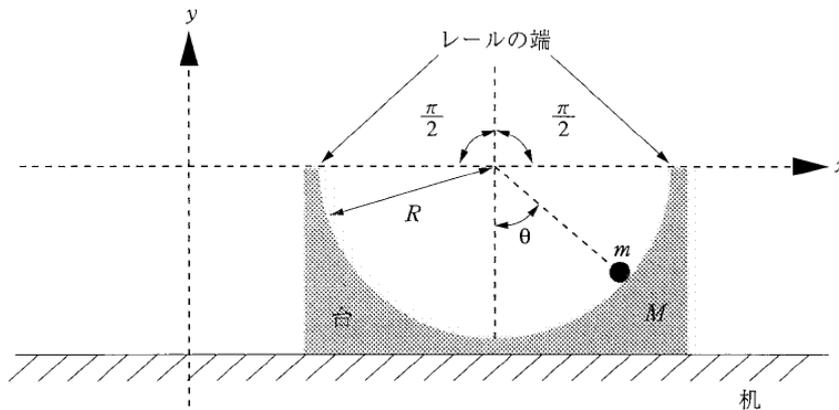


## 入試問題研究 第205回 2007年 関学理F日程① 円運動・単振動

※ 元問題は予備校サイト（代ゼミ）で入手できます。

- [1] 図のように、水平な机の上に置かれた台の内部に、半径  $R$  の半円形のレールが取り付けられている。このレールの上を、大きさを無視できる小物体が摩擦を受けることなく運動している。小物体の質量を  $m$ 、レールを含んだ台の質量を  $M$ 、重力加速度の大きさを  $g$  とし、レールの中心(レールがなす半円の中心)と小物体を結ぶ線分が鉛直下方なす角を  $\theta$  とする。また、鉛直上方を  $y$  軸の正方向とし、レールの端とレールの中心を通る水平な直線を  $x$  軸とする。大と小物体の運動は  $xy$  平面内に限られているものとして、以下の問(1)から(6)に答えよ。



まず、台が机に固定されている場合を考える。

- (1) 小物体が、レールの端まで到達することなくレールに沿って運動し続けるとき、レールの底(最も高さが低いレールの部分)をつかすときの小物体の速さ  $v_0$  が満たす条件を求めよ。
- (2) 小物体が(1)の条件を満たさないとき、小物体はレールの端を通過し、台から飛び出す。小物体がレールの端を通過するとき、その速度の  $x$  成分はいくらか、理由とともに記せ。また、一度台から飛び出した小物体が再びレールの端に戻るか否かについて、その理由とともに記せ。
- (3) 小物体がレールの底付近で振幅の小さい振動をするとき、小物体に働く力の  $x$  成分を  $m$ 、 $g$ 、 $\theta$  を用いて書け。また、その振動の周期を求めよ。振動の周期を求める際、必要ならば  $|\theta|$  が十分に小さいときに成立する近似式、 $\sin\theta \approx \theta$ 、 $\cos\theta \approx 1$  を用いてよい。

次に、台が机に固定されず、机の上を摩擦を受けることなく動ける場合を考える。静止させた状態にある台(小物体はレールの底で静止)に撃力を加え、台のみに  $x$  軸方向の初速度  $V_0$  を与えた。

- (4) 台に撃力が加えられた直後、台は  $x$  軸方向に動き始め、小物体はレールに沿って上がり始める。このことは、小物体とレールを含んだ台と全体の運動量の  $y$  成分が、一定に保たれないことを示す。その理由を記せ。
- (5) 小物体が、台から飛び出すことなくレールに沿って端から端まで運動するとき、台に与えられた初速度  $V_0$  の大きさを求めよ。
- (6) 台の初速度  $V_0$  の大きさが(5)で求めた値より大きいとき、小物体はレールの端を通過し台から飛び出す。台から飛び出した後の小物体が再びレールの端に戻るか否かについて、その理由とともに記せ。

## 入試問題研究 第205回 2007年 関学理F日程① 円運動・単振動 解答解説

[1] 力学的エネルギー保存、運動量保存、単振動などを組み合わせた力学の総合問題。

(1) 台が固定されているので、小物体の力学的エネルギーを考えればよい。レールの底を位置エネルギーの基準とすると  $\frac{1}{2}mv_0^2 < mgR$  を満たせば、レールの端までは行けなくなる。よって、レールの端まで到達しない条件は  $v_0 < \sqrt{2gR}$  である。

(2) レールの端は鉛直になっているので、そのときの小物体の速度の  $x$  成分はゼロである。台から飛び出すとき、台の速度の  $x$  成分はゼロ(固定されている)、小物体の速度の  $x$  成分もゼロだから、水平方向の移動はどちらも無い。よって、再び元のレールの端に戻ってくる。

(3) 振幅が小さい振動だから、小物体が受ける力の  $x$  成分は  $-mg\sin\theta$  であるので、近似式を用いて  $-mg\theta$  と表すことができる。振幅が小さいので  $\theta \approx \frac{x}{R}$  と近似できるから、小物体の運動方程式は  $ma = -\frac{mgx}{R}$  である。  $a = -\frac{g}{R}x$  となるので、単振動の公式  $a = -\omega^2 \cdot x$  に対応させると、この単振動の角速度は  $\omega = \sqrt{\frac{g}{R}}$  となる。

よって、単振動の周期の公式  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  に代入して、この単振動の周期は  $T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$  である。 **※ これは、「ふりこの単振動」とまったく同じ計算である!**

(4) 小物体と台の運動量の  $y$  成分(鉛直方向成分)が保存されないのは、重力や床からの垂直抗力などの鉛直方向の力が「外力」として働いているからである。

(5) 小物体と台の2つの力学的エネルギー保存の法則や、運動量保存の法則に注目するとよい。小物体の重力による位置エネルギーの基準をレールの底とする。

小物体がレールの底のとき、小物体は静止、台は  $V_0$  で動くので、力学的エネルギーは  $\frac{1}{2}MV_0^2$  だ。レールの端に小物体があるとき(小物体と台は同一速度になる!)、小物体の速度  $(v_x, 0)$ 、台の速度  $(v_x, 0)$  とすると、力学的エネルギー保存の法則より

$$\frac{1}{2}MV_0^2 = mgR + \frac{1}{2}(m+M)v_x^2 \quad \dots \textcircled{1}$$

また、水平方向の運動量は保存するので  $MV_0 = mv_x + Mv_x \quad \dots \textcircled{2}$  も成立する。よって、 $\textcircled{2}$ より  $v_x = \frac{MV_0}{m+M}$  だから、 $\textcircled{1}$ に代入して

$$\frac{1}{2}MV_0^2 = mgR + \frac{1}{2}(m+M)\left(\frac{MV_0}{m+M}\right)^2$$

が成立する。これを整理して  $V_0 = \sqrt{\frac{2(m+M)gR}{M}}$  だから、台の初速度が  $\sqrt{\frac{2(m+M)gR}{M}}$  であれば良い。

(6) 小物体がレールの端から飛び出すとき、小物体と台ともに同じ水平速度である。小物体が飛び出してから両者の水平速度は変わらない(水平方向の力が働かないから)。よって、小物体はレールの端に戻ってこれる(両者の水平方向の位置は一致するから!)