

入試問題研究 第207回 2007年 立命館大 ① 力学総合

※ なお、問題文は一部修正（選択肢などを省く）している。

元問題は予備校サイト（代々木ゼミナール）で入手できます。

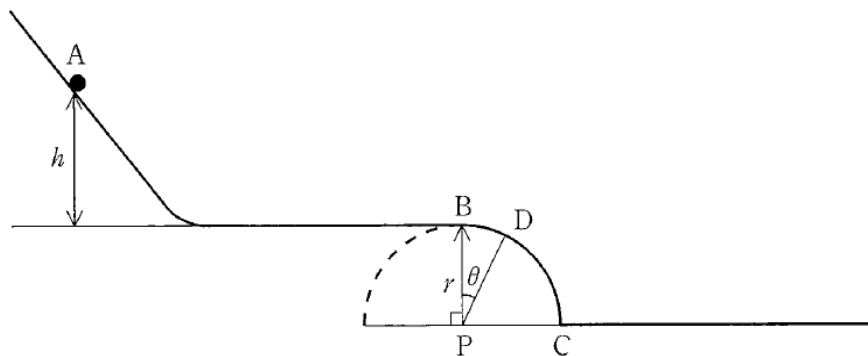
- [1] 次の文章の あ ～ か には適切な数式または語句を記入せよ。また A ～ B には数式または不等式を入れなさい。ただし、重力の加速度を g [m/s²] とする。

図に示すような摩擦のないコース上の点 A に質量が m [kg] の小球がおかれている。この小球が点 A から静かに滑り出す。点 A の高さを h [m] とすると、小球が左側の斜面を滑り終えたときの速さは $v_1 =$ あ [m/s] である。小球は水平な部分では い の法則に従い う 運動し、水平部分の右端の点 B に到達する。点 B から点 C までは点 P を中心とする半径 r [m] の円弧になっている。また、PB と PC のなす角は 90 度である。次の (1)、(2) の場合について答えよ。

- (1) 点 A から滑ってきた小球が点 B から円弧上を滑り、やがて円弧を離れ、右側の水平部分に到達する場合を考える。図に示したように円弧上の小球の位置を点 D で表し、PB と PD のなす角を θ とする。このときの小球の速さは $v_2 =$ え [m/s] となり、円弧上から お [N] の垂直抗力を受ける。ただし、え は v_1 を数式の中に含まない形で示すこと。

次に小球が円弧を離れる点を E とし、点 E の高さを点 P から測ると $r \cos \theta_0 =$ か [m] であった。点 E を離れた小球は右側の水平部分に落下した。この落下に要する時間は A [s] である。ただし、PB と PE のなす角を θ_0 とし、点 E を離れるときの速さを v_2' とする。

- (2) 小球が点 B からコースを離れて飛び出すための条件は B である。



入試問題研究 第207回 2007年 立命館大① 力学総合 解答解説

- [1] 力学的エネルギー保存の法則を使えばよい。点 A のときの力学的エネルギー(この場合は重力による位置エネルギーと運動エネルギー)の和は $mgh+0$ [J] であり、水平部分での力学的エネルギーの和は $0+\frac{1}{2}mv_1^2$ [J] である。「力学的エネルギー保存の法則」より、

$mgh=\frac{1}{2}mv_1^2$ が成立するので、 $v_1=\sqrt{2gh}$ … [あ] である。水平部分では水平方向の力が働かないので、ニュートンの「慣性」… [い] の法則により、「等速直線」… [う] 運動をする。ここまでは、力学の基本中の基本でだれでも出来る問題だから完答が当たり前。合否の分かれ目となる部分はこれ以降である。

- (1) 前問と同様に、点 D での速度は力学的エネルギー保存の法則で求めることができる。

水平部分での力学的エネルギーの和は $0+\frac{1}{2}mv_1^2$ ($=mgh$) [J]、点 D での力学的エネルギーの和は $-mgr(1-\cos\theta)+mv_2^2$ [J] である。

力学的エネルギー保存の法則より、 $mgh=-mgr(1-\cos\theta)+mv_2^2$ が成立するから、点 D での速さは $v_2=\sqrt{2gh+2gr(1-\cos\theta)}$ … [え] [m/s] である。

円運動の向心力が重力と垂直抗力で作られる。円弧から受ける垂直抗力を N [N]、向心力は $\frac{mv_2^2}{r}$ より $\frac{mv_2^2}{r}=mg\cos\theta-N$ が成立する。これに $v_2=\sqrt{2gh+2gr(1-\cos\theta)}$ を代入して $\frac{2mgh}{r}+2mg(1-\cos\theta)=mg\cos\theta-N$ である。よって、円弧から受ける垂直抗力を求めると、点 D での垂直抗力は $N=\frac{mg\{r(3\cos\theta-2)-2h\}}{r}$ … [お] [N] である。

円弧を離れるとき、垂直抗力はゼロだから [お] に代入して $0=\frac{mg\{r(3\cos\theta_0-2)-2h\}}{r}$ が成立する。これを整理して $r\cos\theta_0=\frac{2(h+r)}{3}$ … [か] が求められる。

円弧を離れてからは斜方投射運動になる。鉛直方向成分について計算すればよい。

高さ $r\cos\theta_0$ から鉛直下向きに初速度が $v_2'\sin\theta_0$ であるから、等加速度運動の公式

$x=v_0t+\frac{1}{2}at^2$ に代入して $r\cos\theta_0=v_2'\sin\theta_0t+\frac{1}{2}gt^2$ が成立する。

2次方程式の解の公式より $t=\frac{-v_2'\sin\theta_0\pm\sqrt{(v_2'\sin\theta_0)^2+2gr\cos\theta_0}}{g}$ が得られるが、落下

時刻は正であるから $t=\frac{-v_2'\sin\theta_0+\sqrt{(v_2'\sin\theta_0)^2+2gr\cos\theta_0}}{g}$ … [A] が正解である。

- (2) $\theta=0$ で垂直抗力がゼロ以下になればよい。[お] より $\frac{mg\{r(3\cos 0-2)-2h\}}{r}<0$ である

ので、整理して $\frac{mg(r-2h)}{r}<0$ だから、その条件は $r<2h$ … [B] である。