

入試問題研究 第21回 2004年 早稲田大学 理工 ② 円運動

地球のまわりの半径 r の円軌道上を、人工衛星が一定の速さ v_0 でまわっている。この人工衛星は図のように、質量がともに m である衛星 A と衛星 B が連結した状態(全質量 $2m$)にある。人工衛星は、地球の引力以外の力は受けていない。地球の質量を M 、万有引力定数を G とし、人工衛星の大きさは無視できる者とする。

問1 v_0 を、 G 、 M 、 r を用いて表せ。

問2 人工衛星の公転周期を、 G 、 M 、 r を用いて表せ。

問3 人工衛星の運動エネルギーを K とする。人工衛星がもつ万有引力による位置エネルギーを、 K を用いて表せ。ただし、地球から無限に離れた場所での万有引力による位置エネルギーを 0 とする。

この人工衛星が、円軌道上を運動しているある瞬間に、図の点 P で衛星 A と衛星 B とに分離した。このとき衛星 A は、その進行方向と逆向きに衛星 B を押し出し、その反作用で衛星 A 自身は、進行方向に加速した。分離直後の衛星 B に対する衛星 A の速さは v であった。

問4 分離直後の衛星 A の速さを、 v_0 と v で表せ。

問5 衛星 A と衛星 B を分離させるのに必要な仕事は、運動エネルギーの総和の増加分に等しい。この仕事を、 m と v を用いて表せ。

以下では、分離後の衛星 A の運動を考えよう。

分離直後の衛星 A の運動エネルギーは、分離前の人工衛星全体の運動エネルギー K の α 倍であった。図の点 P で人工衛星が分離した後、衛星 A は楕円軌道を描いて地球のまわりをまわるようになった。

問6 分離直後の衛星 A がもつ万有引力による位置エネルギーを K を用いて表せ。

問7 もしも分離の際に衛星 A が加速し過ぎて、

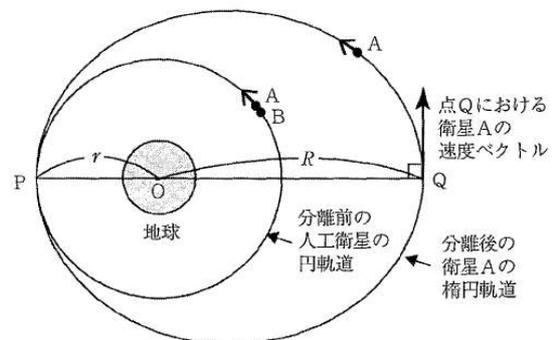
α がある数値以上になると、衛星 A は楕円軌道を描かずに、無限遠に飛び去ってしまう。その数値を求めよ。

分離により衛星 A が加速した点 P は、図の楕円軌道上で、地球の中心 O に最も近い点となる。一方、楕円軌道上で点 O から最も遠い点 Q では、衛星 A の速度ベクトルは、点 O と点 Q を結ぶ直線に垂直である。また、点 O から点 Q までの距離を R とする。

問8 点 Q での衛星 A の速さは、点 P での分離直後の衛星 A の速さの何倍か、 r 、 R を用いて表せ。

問9 点 Q において、衛星 A がもつ万有引力による位置エネルギーを K 、 r 、 R を用いて表せ。

問10 α を r 、 R を用いて表せ。



図

入試問題研究 第21回 2004年 早稲田大学 理工② 円運動 解答・解説

問1 万有引力の法則より $f = G \frac{mM}{r^2}$ の万有引力が衛星に働き、それを向心力 $f = \frac{mv_0^2}{r}$ と

して円運動を行う。これより $G \frac{mM}{r^2} = \frac{mv_0^2}{r}$ が成立する。よって、 $v_0 = \sqrt{\frac{GM}{r}}$ である。

問2 衛星の公転周期は $T = \frac{2\pi r}{v_0}$ だから、 $v_0 = \sqrt{\frac{GM}{r}}$ より $T = \frac{2\pi r}{v_0} = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{GM}}$ である。

問3 衛星の運動エネルギーは $K = \frac{1}{2} \cdot 2m \cdot v_0^2 = \frac{G \cdot 2m \cdot M}{2r}$ 、衛星の万有引力による位置エネルギー

は、万有引力による位置エネルギーの公式より $U = -\frac{G \cdot M \cdot 2m}{r}$ だから $U = -2K$ 。

問4 分離直後のそれぞれの衛星の速度を v_1 、 v_2 とする。相対速度が v になるから、

$v_1 = v_2 + v$ ……①、運動量保存の法則より $2mv_0 = mv_1 + mv_2$ ……②より、 $v_1 = v_0 + \frac{1}{2}v$ 、

$v_2 = v_0 - \frac{1}{2}v$ になる。よって、衛星Aの速度は $v_2 = v_0 + \frac{1}{2}v$ である。

問5 運動エネルギーの増加は $\frac{1}{2}m\left(v_0 + \frac{v}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}m\left(v_0 - \frac{v}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 \times 2$ である。運動エネルギー

の増加が仕事になるから、分離に必要な仕事は $\frac{mv^2}{4}$ である。

問6 分離直後のAの万有引力による位置エネルギーは $U = -\frac{G \cdot M \cdot m}{r}$ より、 $U = -K$ だ。

問7 エネルギーの和 $U + K = -K + \alpha K$ より、無限遠方に行っても運動エネルギーが残れば飛び去れるのだから、 $U + K = -K + \alpha K > 0$ であればよい。よって、 $\alpha > 1$ であればよい。

問8 ケプラーの第二法則(面積速度一定の法則)より、 $rv_p = Rv_Q$ が成立するから、Q点での

速度は $v_Q = v_p \times \frac{r}{R}$ より、P点での速度の $\frac{r}{R}$ 倍になる。

問9 分離後のAの万有引力による位置エネルギーは $U = -G \frac{mM}{R}$ であり、分離前の運動エネルギー

は $K = \frac{G \cdot m \cdot M}{r}$ だったから、 $U = -\frac{K \cdot r}{R}$ が成立する。

問10 P点とQ点のそれぞれについて、万有引力による位置エネルギーと運動エネルギーの

について、力学的エネルギー保存の法則 $-K + \alpha K = -\frac{Kr}{R} + \alpha K \cdot \left(\frac{r}{R}\right)^2$ が成立する。よって、

$-1 + \alpha = -\frac{r}{R} + \alpha \cdot \left(\frac{r}{R}\right)^2$ であるから、 $\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)\alpha = 1 - \frac{r}{R}$ より、 $\alpha = \frac{R}{r+R}$ である。