入試問題研究 第213回 2007年 慶応大学 理工 ① 力学(衝突)

※ なお、問題文は一部修正（選択肢などを省く）している場合があります。
元問題は予備校サイト（代々木ゼミナール）で入手できます。

［Ｉ］ 次の文中の［　　］に適切な数または式を記入しなさい。ただし、［ケ］は解答欄にグラフを書きなさい。

図のような鉛直で滑らかな壁を持つ溝がある。時刻 $t=0$ に、この溝の上端の両側から、質量 $3M$ の小球Ａと質量 M の小球Ｂを同時に水平に投げた。図のように鉛直下方が y 軸となるように x-y 座標をとる。 $t=0$ のとき、小球Ａの位置は $(-4T_0V,0)$ 、速度は $(V,0)$ であり、小球Ｂの位置は $(4T_0V,0)$ 、速度は $(-3V,0)$ であった。ただし、 T_0 、 V はそれぞれ正の定数である。２個の小球はその後 x-y 平面内で運動した。溝の幅は $8T_0V$ であり、十分深く、空気の抵抗は無視できるものとする。重力加速度の大きさを g とする。また、小球Ａと小球Ｂ、小球Ａと壁、小球Ｂと壁の衝突の反発係数(はねかえり係数)はすべて e （ $0<e<1$ ）であるとする。

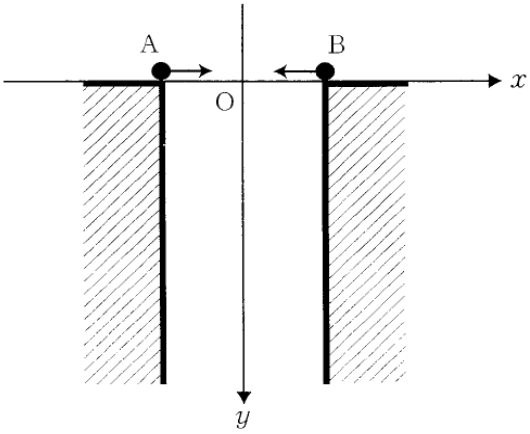
(1) 小球Ａと小球Ｂの１回目の衝突が起こる時刻を $t=T_1$ とすれば、 t_1 は［ア］である。
１回目の衝突直前の、小球Ａと小球Ｂの運動量の和の x 成分は［イ］であり、相対速度の y(小球Ａの速度の y 成分と、小球Ｂの速度の y 成分の差)は［ウ］である。

(2) 小球Ａと小球Ｂの１回目の衝突直後には、小球Ａの速度の x 成分は［エ］となる。全力学的エネルギーのうち、この衝突で失われたエネルギーは［オ］である。

(3) 小球Ｂと壁がはじめて衝突する時刻は［カ］× t_1 である。

(4) 小球Ａと小球ＢとのＮ回目の衝突が起こる時刻 t_N は［キ］× t_1 であり、そのときの y 座標は t_N を含んだ式で示すと［ク］である。

(5) $e=0.5$ のとき、小球Ｂの速度の x 成分 u_{Bx} の時間変化を、 $t=0$ から $5t_1$ まで［ケ］に図示しなさい。



入試問題研究 第213回 2007年 慶応大学 理工 ① 力学(衝突) 解答解説

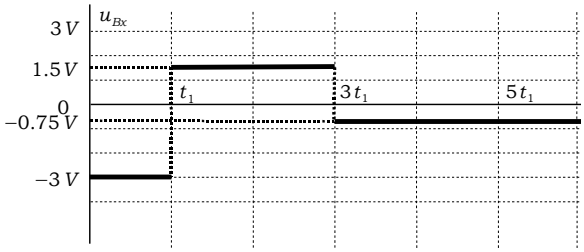
［Ｉ］

(1) 溝の幅は $8T_0V$ であり、互いの相対速度の大きさは $4V$ であるので、小球Ａと小球Ｂの１回目の衝突が起こる時刻を $t=T_1$ とすれば $4Vt_1=8T_0V$ だから、 $t_1=2T_0$ ・・・$\boxed{ア}$ である。１回目の衝突直前の、小球Ａと小球Ｂの運動量の和の $3M\cdot(+V)+M\cdot(-3V)$ だから、x成分は０・・・$\boxed{イ}$ であり、小球Ａの速度の y 成分と、小球Ｂの速度の y 成分はそれぞれ初速度ゼロ、加速度 g の等加速度運動だから、相対速度の y 成分は０・・・$\boxed{ウ}$ である。

(2) 小球Ａと小球Ｂの１回目の衝突直後の速度を V_A 、 V_B として、衝突計算をしてみよう。運動量保存の法則より $0=3MV_A+MV_B$ 、反発係数の公式より $e=-\dfrac{V_A-V_B}{V-(-3V)}$ が成立する。これらより $3V_A+V_B=0$ 、 $-V_A+V_B=4eV$ だから、小球Ａの速度の x 成分は $V_A=-eV$ ・・・$\boxed{エ}$ となる。また、小球Ｂの速度の x 成分は $V_B=3eV$ である。よって、1回目の衝突で失われたエネルギーは $\left\{\dfrac{1}{2}\cdot 3M\cdot V^2+\dfrac{1}{2}\cdot M\cdot(3V)^2\right\}-\left\{\dfrac{1}{2}\cdot 3M\cdot V_A^2+\dfrac{1}{2}\cdot M\cdot V_B^2\right\}$ だから、 $6MV^2-6e^2MV^2=6(1-e^2)MV^2$ ・・・$\boxed{オ}$ である。

(3) 衝突後は、、衝突位置は $x=-2VT_0$ 、小球Ａ、Ｂの速度は、Ａが $V_A=-eV$ 、Ｂが $V_B=3eV$ である。小球Ｂが1回目の衝突から壁に衝突するまで $6VT_0\div 3eV=\dfrac{2T_0}{e}$ だけ時間がかかる。 $t_1=2T_0$ より、小球Ｂがはじめて壁に衝突する時刻は $t_1\left(1+\dfrac{1}{e}\right)$ になるので $1+\dfrac{1}{e}$ ・・・$\boxed{カ}\times t_1$ である。また、小球Ａは $2VT_0\div eV=\dfrac{2T_0}{e}$ より、同時刻に壁に衝突する。

(4) 壁に衝突後の小球Ａ、Ｂの速度は、小球Ａが $V_A'=e^2V$ 、小球Ｂが $V_B'=-3e^2V$ になる。両者の相対速度の大きさは $4e^2V$ だから、壁に衝突後から２回目の衝突までの時間は $8VT_0\div 4e^2V=\dfrac{2T_0}{e^2}$ である。よって、2回目の衝突の時刻は $t_1\left(1+\dfrac{1}{e}+\dfrac{1}{e^2}\right)$ になる。3回目も同様にして $t_1\left(1+\dfrac{1}{e}+\dfrac{1}{e^2}+\dfrac{1}{e^3}+\dfrac{1}{e^4}\right)$ となる。よって、それ以降も同様にして求めると、N 回目の衝突が起こる時刻 t_N は $t_1\left(1+\dfrac{1}{e}+\dfrac{1}{e^2}\cdots\dfrac{1}{e^{2N-3}}+\dfrac{1}{e^{2N-2}}\right)$ となる。よって、これを整理すると、 $\displaystyle\sum_{i=0}^{2N-2}\frac{1}{e^i}$ ・・・$\boxed{キ}\times t_1$ である。

また、そのときの小球Ａ、Ｂの運動の y 座標は、両者ともに自由落下運動（初速度ゼロ、加速度 g の等加速度運動）になるので、 t_N を含んだ式で示すと $\dfrac{1}{2}gt_N^2$ ・・・$\boxed{ク}$ である。

(5) $e=0.5$ のとき、小球Ｂの速度の x 成分 u_{Bx} の時間変化を $t=0$ から $5t_1$ まで図示すると、右のグラフになる。