

入試問題研究 第215回 2007年 早稲田大学 理工 ② 力学

※ なお、問題文は一部修正（選択肢などを省く）している場合があります。
元問題は予備校サイト（代々木ゼミナール）で入手できます。

〔Ⅱ〕以下の間の答を解答用紙の該当欄に記入せよ。

図1に示すように、バネ定数 k のじゅうぶん軽いバネの両端につながれた質量 m の物体 A、B が、摩擦のない水平な床の上にある。また、その右側に質量 M の物体 C がある。すべての運動は直線 AB 上で起こるものとし、右方を正の向きとする。

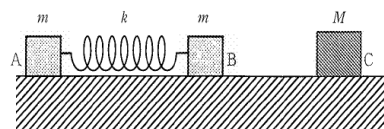


図1

まず図2のように、物体 A を床に固定し、物体 C を物体 B に完全弾性衝突させたところ、衝突直後、物体 B は左向きに速さ v で運動し、物体 C は右向きに運動した。以下の間に答えよ。

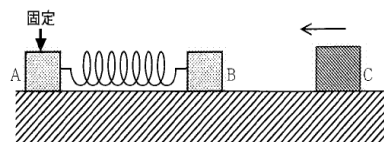


図2

問1 衝突直前の物体 C の速度を m 、 M 、 v を用いて表せ。衝突の直前・直後で、バネの長さは自然長なので、バネからの復元力は物体 B に働かないことに注意せよ。

問2 物体 C が衝突直後に右向きに運動するための条件を求めよ。

問3 物体 B は衝突後ばねの復元力によって振動する。振動の周期はいくらか。

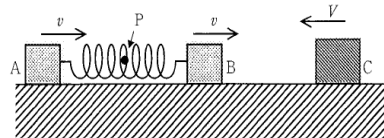


図3

今度は図3のように、バネでつながれた物体 A、B を右向きに速さ v で、物体 C を左向きに速さ V で、それぞれ等速直線運動させたところ、物体 B は物体 C と完全弾性衝突した。衝突の直前・直後でバネの長さは自然長であった。

衝突直後、物体 B は左向きに速さ v で運動した。以下の間に答えよ。

問4 バネの中心 P の位置 r は時間 t とともにどのように変化するか。衝突した時刻を $t=0$ 、そのときの P の位置を $r=0$ として、解答欄に図示せよ。

問5 物体 C の衝突直後の速度を、 m 、 M 、 v を用いて表せ。

問6 バネが最も縮んだときのバネの自然長からの縮み x を、 m 、 M 、 v を用いて表せ。

問7 物体 A、B は衝突後ばねの復元力によって振動を始める。その振動の周期はいくらか。

固体の中では、原子が隣りあう原子と力を及ぼしあい、規則正しく配列している。その様子は、規則正しく並んだ質点どうしをバネで連結したモデルで表現できる。そこで、バネでつながれた物体 A、B を、同体の最も粗いモデルと考えよう。もしもバネが目に見えないほど短いならば、我々には点 P に質量 $2m$ の一つの物体があるように見えるであろう。図3の衝突が、この質量 $2m$ の物体と物体 C との衝突のように見えたとして、以下の間に答えよ。

問8 問4と問5の結果を利用して、物体 C と質量 $2m$ の物体との反発係数を求めよ。

問9 図3の衝突は、物体 B と物体 C との間の完全弾性衝突である。それにもかかわらず、バネでつながれた物体 A、B を質量 $2m$ の一つの物体とみなすと、反発係数は1にならない。その理由を述べよ。

入試問題研究 第215回 2007年 早稲田大学 理工 ② 力学 解答解説

[Ⅱ]

問1 衝突計算をするだけでよい。右向きを正とし、物体Cの速度を、衝突前が v_0 、衝突後が V とする。運動量保存の法則より $M \times (-v_0) = m \times (-v) + M \times (+V)$ 、はねかえり係数の公

式より $1 = -\frac{(-v) - (+V)}{0 - (-v_0)}$ が成立する。 $v_0 = v + V$ だから $-M v_0 = -m v + M (v_0 - v)$ で

ある。これより $v_0 = \frac{(m+M)v}{2M}$ となり、衝突直前の物体Cは、左向きに、速さ $\frac{(M+m)v}{2M}$ で

ある。また、衝突後の物体Cの速さは $V = \frac{(m-M)v}{2M}$ である(問2で使う!)。

問2 衝突物体Cが衝突直後の速度は $V = \frac{(m-M)v}{2M}$ であるので、右向きに運動するために

は、 $V = \frac{(m-M)v}{2M} > 0$ の条件が成立するので、その条件は $m > M$ である。

問3 物体Aが固定されているので、物体Bとばねの単振動となるから、単振動の周期の公式

$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$ より、このときの振動の周期は $2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$ である。

問4 衝突後の物体A、Bの運動は、物体Aが右向きに速さ v 、物体Bが左向きに速さ v になる。ばねの中心位置(物体A、Bの重心位置)は等速運動する。また、運動量の和はゼロなので、重心の運動速度を v_G とすると、 $2m v_G = 0$ であるから、ばねの中心Pの位置(物体A、Bの重心位置)の速度 v_G はゼロである(動かない!)。

問5 衝突直後のCの速度を V' とする。 $m \times v + M \times (-V) = m \times (-v) + M \times V'$ (運動量保存の法則)が成立し $m v - M V = -m v + M V'$ 、 $1 = -\frac{(-v) - (+V')}{(+v) - (-V)}$ (はねかえり係数の

公式)だから $V = V'$ が成立する。よって、物体Cの衝突直後の速度は $V' = \frac{mv}{M}$ である。

問6 衝突直後の物体A、Bの速さは v (向きは逆であるが)である。バネが最も縮んだときのバネの自然長からの縮み x 、そのときの両者の速度(物体A、Bは同速度!)は0だから、エ

ネルギー保存の法則より $\frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} k x^2$ が成立するので $x = \sqrt{\frac{2m}{k}} v$ になる。

問7 物体A、Bは重心位置(静止している!)を基準として位相が逆の単振動する。自然長の位置から、物体Aが x 左にいる(物体Bは x 右にいる)とき、ばねは $2x$ 縮んでいることになる。物体Aの運動方程式は $ma = -k \times 2x$ だから、 $a = -\frac{2k}{m} x$ となり、単振動の公式

$a = -\omega^2 x$ より、角振動数は $\omega = \sqrt{\frac{2k}{m}}$ である。周期の公式 $T = \frac{2\pi}{\omega}$ に代入して、周期を

求めると、そのときの単振動の周期は $2\pi \sqrt{\frac{m}{2k}}$ である。

問8 問4と問5の結果を利用して、物体ABと物体Cの反発係数を考える。物体ABは初め右向きに v 、物体Cは左向きに $\frac{mv}{M}$ が、衝突後は物体ABが静止、物体Cが右向きに $\frac{mv}{M}$

となる。よって、反発係数の公式より $e = -\frac{0 - \left(\frac{mv}{M}\right)}{(+v) - \left(-\frac{mv}{M}\right)}$ だから、 $e = \frac{m}{M+m}$ である。

問9 物体ABの単振動のエネルギーにそれまでの運動エネルギーが使われるため、弾性衝突(運動エネルギーが保存する)になれない(はねかえり係数が1になれない)