入試問題研究 第216回 2007年 早稲田大学 理工 ③ 電磁気

※ なお、問題文は一部修正（選択肢などを省く）している場合があります。
元問題は予備校サイト（代々木ゼミナール）で入手できます。

〔Ⅲ〕 以下の間の答を解答用紙の該当欄に記入せよ。

真空中に置かれた平行板コンデンサーを考える。極板間の距離は可変で、はじめは d に固定されている。極板の面積は S である。 d はじゅうぶん小さく、 S は十分大きいので、極板の端の影響は無視できるものとする。真空中の誘電率を ϵ_0 として、以下の問いに答えよ。

問1 このコンデンサーの電気容量はいくらか。

問2 このコンデンサーを抵抗が無視できる導線を用いて電源に接続詞、充電する。コンデンサーに蓄えられた電気量が q のとき、極板間の電位差はいくらか

問3 問2においてコンデンサーの電気量をじゅうぶん小さな値 Δq だけ増加させる際、電源がする仕事はいくらか。

問4 コンデンサーの電気量が Q になったとき、コンデンサーに蓄えられた静電エネルギーはいくらか。

問5 電気量が Q になった時点でコンデンサーを電源から切り離した。次いで、一方の極板を固定し、他方の極板に外力を加え、極板間の距離が $d+x$ になるまでゆっくりと引き離した。このとき外力がした仕事はいくらか。ただし、 x は十分に小さいものとする。

問6 問5において、加えた外力の大きさはいくらか。

問7 コンデンサーに蓄えられた静電エネルギーは、極板間の空間に存在する電場それ自身がもつエネルギーと考えることも出来る。このように考えたとき、極板間の空間は単位体積あたりいくらのえねるぎーを持っているか。極板間の電場の強さを E として、 E および ϵ_0 のみを用いて答えよ。

次に、真空中に置かれた半径 a の球状物体Aを考える。Aは表面にのみ一様に分布した電荷を持つとする。Aの外部の電場は、表面電荷がすべてAの中心に集まったときに生じる電場と同一になることが分かっている。クーロンの法則における比例定数を k_0 として、以下の問いに答えよ。

問8 Aの全電荷が q のとき、十分小さな電荷 Δq をもつ点電荷を外力によって無限遠からAの表面までゆっくりと運ぶ際、外力がする仕事はいくらか。

問9 Aの全電荷が Q になったとき、Aに蓄えられた静電エネルギーはいくらになるか。

問10 $Q=1.6\times10^{-19}$ C、 $a=5.0\times10^{-11}$ m のとき、Aに蓄えられた静電エネルギーはいくらになるか。

なお、上で求めた静電エネルギーは、荷電物体それ自身が持つエネルギーという意味で、自己エネルギーと呼ばれることもある。

入試問題研究 第216回 2007年 早稲田大学 理工 ③ 電磁気 解答解説

〔Ⅲ〕

問1 コンデンサーの電気容量の公式 $C=\frac{\epsilon S}{d}$ より、このコンデンサーの容量は $\frac{\epsilon_0 S}{d}$ である。

問2 コンデンサーの公式 $Q=CV$ より、極板間の電位差を V とすると $q=\frac{\epsilon_0 S}{d}\cdot V$ だから、

$V=\frac{qd}{\epsilon_0 S}$ である。

問3 電源がする仕事は $\Delta W=\Delta q\cdot V$ より、 $V=\frac{qd}{\epsilon_0 S}$ を代入して $\Delta W=\frac{qd\Delta q}{\epsilon_0 S}$ である。

問4 Δq が微小だから $\frac{\Delta W}{\Delta q}=\frac{dW}{dq}=\frac{qd}{\epsilon_0 S}$ である。積分して $W=\int_0^Q \frac{qd}{\epsilon_0 S}\,dq$ だから、積分計算をすると $W=\frac{1}{2}\cdot\frac{d}{\epsilon_0 S}Q^2$ になる。よって、コンデンサーに蓄えられた静電エネルギー $\frac{dQ^2}{2\epsilon_0 S}$ と表すことができる。(グラフの面積から求めることもできる)

問5 静電エネルギーの増加 $\Delta U=\frac{1}{2}\cdot\frac{d+x}{\epsilon_0 S}Q^2-\frac{1}{2}\cdot\frac{d}{\epsilon_0 S}Q^2=\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{\epsilon_0 S}Q^2$ が外力がした仕事に相当する。よって、外力がした仕事は $\frac{Q^2 x}{2\epsilon_0 S}$ である。

問6 問5において、加えた外力の大きさを f とすると、 $\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{\epsilon_0 S}Q^2=fx$ が成立する。よって、

$f=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\epsilon_0 S}Q^2$ だから、外力の大きさは $\frac{Q^2}{2\epsilon_0 S}$ である。

問7 コンデンサーの静電エネルギー $U=\frac{1}{2}\cdot\frac{d}{\epsilon_0 S}Q^2$ 、極板間の電場 $E=\frac{V}{d}=\frac{Q}{\epsilon_0 S}$ 、電場がある空間の体積が Sd であるので、単位堆積あたりの静電エネルギーは、 $\frac{U}{Sd}$ だから、

$\frac{U}{Sd}=\frac{1}{2}\cdot\epsilon_0 E^2$ である。

問8 点電荷間の位置エネルギーの公式 $U=k_0\cdot\frac{q\cdot q'}{r}$ だから、 Δq の点電荷が無限遠方にいるとき、0、A の表面にあるとき $k_0\cdot\frac{q\cdot\Delta q}{a}$ だから、外力がする仕事は $k_0\cdot\frac{q\cdot\Delta q}{a}$ である。

問9 $\Delta W=k_0\cdot\frac{q\cdot\Delta q}{a}$ だから、 Δq が微小のとき、 $\frac{\Delta W}{\Delta q}=\frac{dW}{dq}=k_0\cdot\frac{q}{a}$ が成立する。両辺積分して $W=\int_0^Q k_0\cdot\frac{q}{a}\,dq$ である。積分計算を行って $W=\frac{1}{2}\cdot\frac{k_0}{a}Q^2$ だから、A に蓄えられた静電エネルギーは $\frac{k_0 Q^2}{2a}$ である。(グラフの面積から求めることもできる)

問10 A に蓄えられた静電エネルギーは $\frac{k_0 Q^2}{2a}$ だから、これに数値を代入して計算すると、

$\frac{(9.0\times10^9)\cdot(1.6\times10^{-19})^2}{2\times(5.0\times10^{-11})}=2.3\times10^{-18}$ [J] である。