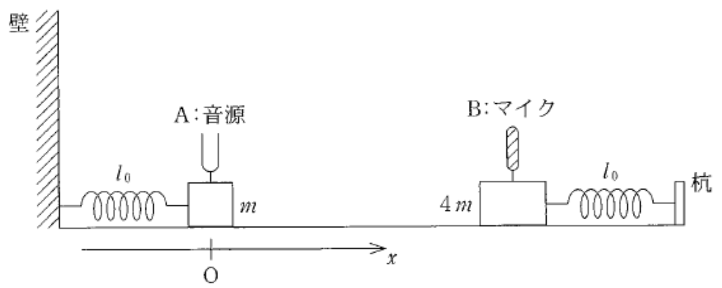
入試問題研究　第219回　2007年　東京医科歯科大学　②　ドップラー効果・単振動

※ なお、問題文は一部修正（選択肢などを省く）している場合があります。
元問題は予備校サイト（代々木ゼミナール）で入手できます。

［2］ 水平で滑らかな床の上に音源(おんさ)を備えた質量　m　の小物体Aと、音源と同じ高さにあるマイクロフォン(マイク)を備えた質量　$4m$　の小物体Bが、それぞれ自然長が　l_0　でばね定数が　k　の軽いバネにつながれている。下図のようにばねの他端は床に垂直な壁と杭にそれぞれつながれている。小物体Bのバネがつながれている杭は音を反射しないものとする。また、マイクとつながっているコードや装置は、物体の運動に影響を与えないものとする。バネが自然長のときの小物体Aの位置を原点Oに取り、水平方向右向きをx軸の正とする。

音源からでる振動数　f_s　の音をマイクで受け、音の振動数を測定する。空気中での音速を　V　、風の影響はなく、音速は音源の速さに比べて十分速く、音源からマイクまで音が届く時間は直接音、反射音共に無視できるものとし、以下の問に答えよ。

小物体Bは動かさず、小物体Aのバネを　l　(　>0　)だけ伸ばした後、時刻　$t=0$　で小物体Aをそっと放すと同時に音源を鳴らした。



問1　t 秒後の単振動する小物体Aの位置　x　と速さ　v　を求めよ。

問2　音源から直接マイクに届く音(直接音)の振動数　f_1　を時間　t　の関数として求めよ。

問3　直接音が最も高くなる最初の時刻とその振動数を求めよ。

問4　壁で一度反射した後マイクに届く音(反射音)の振動数　f_2　を時間　t　の関数として求めよ。

問5　音速が　$V=340$　m/s、音源の振動数が　$f_s=440$　Hzのとき、直接音が最も低くなる最初の時刻での直接音と反射音の差が　11　であった。小物体Aの速さの最大値を有効数字2桁で求めよ。

ただし、xが十分小さいとき、　$\sqrt{1+x^2} \approx 1+\frac{1}{2}x^2$　の近似を用いよ。

次に、小物体Aと小物体Bのバネをそれぞれ　l　(　>0　)だけ伸ばした後、時刻　$t=0$　で小物体Aと小物体Bを共にそっと放すと同時に音源を鳴らした。

問6　直接音の振動数　f_3　および反射音の振動数　f_4　を時間　t　の関数として、それぞれ求めよ。

問7　小物体Bの速さが最も速くなる最初の時刻での直接音と反射音の振動数の差　Δf　を求めよ。

入試問題研究 第219回 2007年 東京医科歯科大学 ②ドップラー効果・単振動 解答解説

［2］ バネの単振動とドップラー効果を融合した問題である。

問1 この単振動の振幅は l 、角振動数は $\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ 、初期位相は $\dfrac{\pi}{2}$ [rad] である。後は単振動の公式 $x=A\sin(\omega t+\delta)$ 、 $v=A\omega\cos(\omega t+\delta)$ に代入するだけだ。 t 秒後の単振動する小物体Aの位置 x は $x=l\sin\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}t+\dfrac{\pi}{2}\right)$ になるので、 $x=l\cos\sqrt{\dfrac{k}{m}}t$ である。

速さ v は $v=l\sqrt{\dfrac{k}{m}}\cdot\cos\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}t+\dfrac{\pi}{2}\right)$ だから、 $v=-l\sqrt{\dfrac{k}{m}}\cdot\sin\sqrt{\dfrac{k}{m}}t$ である。

また、微積分法を用いると、速度は位置を時間で微分したもの $v=\dfrac{dx}{dt}$ より $.v=-l\sqrt{\dfrac{k}{m}}\cdot\sin\sqrt{\dfrac{k}{m}}t$ でもよい。※ ついでに、加速度は速度を時間で微分したのもだから $a=\dfrac{dv}{dt}$ である。

問2 ドップラー効果の公式 $f=f_0\cdot\dfrac{V-v_O}{V-v_S}$ （S→O の向きを正とする）に代入して求めると、音源から直接マイクに届く音（直接音）の振動数 f_1 は、 $f_1=f_s\cdot\dfrac{V-0}{V-\left(-l\sqrt{\dfrac{k}{m}}\sin\sqrt{\dfrac{k}{m}}t\right)}$ になる。よって、直接音の振動数は $f_1=\dfrac{f_sV}{V+l\sqrt{\dfrac{k}{m}}\sin\sqrt{\dfrac{k}{m}}t}$ である。

問3 直接音の振動数が最も高いときは、 f_1 の分母が最小になればよいので $\sin\sqrt{\dfrac{k}{m}}t=-1$ のときである。よって、 $\sqrt{\dfrac{k}{m}}t=\dfrac{3\pi}{2}$ だから、そのときの時刻は $t=\dfrac{3\pi}{2}\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ である。

問4 ドップラー効果の公式 $f=f_0\cdot\dfrac{V-v_O}{V-v_S}$ より、 $f_2=f_s\cdot\dfrac{V-0}{V-\left(+l\sqrt{\dfrac{k}{m}}\sin\sqrt{\dfrac{k}{m}}t\right)}$ だから、反射音の振動数は $f_2=\dfrac{f_sV}{V-l\sqrt{\dfrac{k}{m}}\sin\sqrt{\dfrac{k}{m}}t}$ である。

問5 直接音の振動数が最も低くなる最初の時刻のとき、反射音の振動数は最も高くなる。そのときの物体Aの速さは $v=l\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ である。ドップラー効果の公式 $f=f_0\cdot\dfrac{V-v_O}{V-v_S}$ より、直接音の振動数は $f_1=\dfrac{f_sV}{V+v}$ 、反射音の振動数は $f_2=\dfrac{f_sV}{V-v}$ である。振動数の差が 11 [Hz] であったから、 $\dfrac{f_sV}{V-v}-\dfrac{f_sV}{V+v}=11$ これより、 $v^2+40\times340\times2v-340^2=0$ だから

$v=-40\times340\pm\sqrt{(40\times340)^2+340^2}$ （複号の負は明らかに不適解）である。これを整理して、 $v=40\times340\left(-1+\sqrt{1+\dfrac{1}{40^2}}\right)$ となる。xが十分小さいときの近似 $\sqrt{1+x}\approx1+\dfrac{1}{2}x$ を用いて $v=40\times340\times\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{40^2}$ より $v=4.25$ だ。有効数字2桁だから4.3 [m/s] である。

次に、小物体Ａと小物体Ｂのバネをそれぞれ l （>0）だけ伸ばした後、同時に静かに手を離したときの運動を考え、単振動の公式 $x=A\sin(\omega t+\delta)$ 、 $v=A\omega\cos(\omega t+\delta)$ に代入するだけだ。

時刻 t [s] での小物体Ａの位置 x は $x_A=l\cos\sqrt{\dfrac{k}{m}}t$ 、速さ v は $v_A=-l\sqrt{\dfrac{k}{m}}\cdot\sin\sqrt{\dfrac{k}{m}}t$ であり、物体Ｂの位置は $x_B=-l\cos\sqrt{\dfrac{k}{4m}}t$ 、速度は $v_B=l\sqrt{\dfrac{k}{4m}}\sin\sqrt{\dfrac{k}{4m}}t$ である。

問6 ドップラー効果の公式 $f=f_0\cdot\dfrac{V-v_O}{V-v_S}$ に代入して求めるだけである。

直接音の振動数は $f_3=f_s\cdot\dfrac{V-\left(+l\sqrt{\dfrac{k}{4m}}\sin\sqrt{\dfrac{k}{4m}}t\right)}{V-\left(-l\sqrt{\dfrac{k}{m}}\sin\sqrt{\dfrac{k}{m}}t\right)}$ であり、

壁からの反射音の振動数は $f_4=f_s\cdot\dfrac{V-\left(+l\sqrt{\dfrac{k}{4m}}\sin\sqrt{\dfrac{k}{4m}}t\right)}{V-\left(+l\sqrt{\dfrac{k}{m}}\sin\sqrt{\dfrac{k}{m}}t\right)}$ である。

問7 小物体Ｂの速さ $v_B=l\sqrt{\dfrac{k}{4m}}\sin\sqrt{\dfrac{k}{4m}}t$ が最も速くなる最初の時刻は $\sqrt{\dfrac{k}{4m}}t=\dfrac{\pi}{2}$ より $t=\dfrac{\pi}{2}\sqrt{\dfrac{4m}{k}}$ である。そのときの小物体Ａの速度は $v_A=-l\sqrt{\dfrac{k}{m}}\cdot\sin\sqrt{\dfrac{k}{m}}t$ に代入して求めると $v_A=0$ である。また、小物体Ｂの速度は $v_B=l\sqrt{\dfrac{k}{4m}}\sin\sqrt{\dfrac{k}{4m}}t$ より、 $v_B=l\sqrt{\dfrac{k}{4m}}$ である。

よって、ドップラー効果の公式 $f=f_0\cdot\dfrac{V-v_O}{V-v_S}$ に代入して、直接音、反射音の振動数を求めるだけでよい。

直接音の振動数は $f_3=f_s\cdot\dfrac{V-l\sqrt{\dfrac{k}{4m}}}{V}$ であり、反射音の振動数は $f_4=f_s\cdot\dfrac{V-l\sqrt{\dfrac{k}{4m}}}{V}$ であるから、直接音と反射音の振動数の差は $\Delta f=|f_3-f_4|=0$ である。