入試問題研究　第 22 回　1999 年　東京大学　単振動

水平な机の上に置かれた代の内側に、半径 R の半円形のレールが取りつけられている。（図 1-1）。机上の一点Oを原点として水平に x 軸をとり、レールの中心Cの x 座標が原点に一致するよう台を置いた。まず、台を机に固定したまま、図 1-1 のように小球をレールの最下点Pから $+x$ 方向に L だけ離れたレール上の点Qに一旦停止させる。その後小球はレール上を摩擦を受けることなく運動するものとして、以下の設問に答えなさい。ただし、小球の質量を m_1、レールを含んだ台の質量を m_2、重力加速度を g とする。また、L は R に比べて十分小さいものとする。必要であれば、θ [rad]が十分小さいときの近似公式、$\cos\theta \cong 1$ 、$\sin\theta \cong \theta$ を用いても良い。

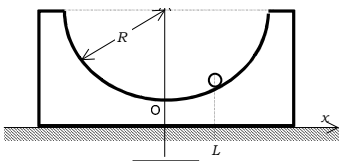


図 1-1

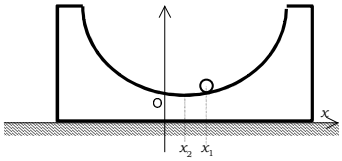


図 1-2

Ⅰ　台を机に固定したままで、小球を静かに放したところ単振動を始めた。小球の x 座標を x_1、x 軸方向の加速度を a_1 とする。

(1)　小球の x 軸方向の運動方程式を求めなさい.

(2)　この単振動の周期を求めなさい。

Ⅱ　図 1-1 の状態に戻し、今度は、台が机に対して摩擦を受けることなく動けるようにした。その上で小球を点Qから静かに放したところ、小球はやはり単振動を始めた。図 1-2 のように小球と点Pの x 座標をそれぞれ x_1、x_2、小球と台の x 軸方向の加速度をそれぞれ a_1、a_2 とする。

(1)　小球と台に働く力の関係から、a_1 と a_2 の間に成り立つ関係式を求めなさい。

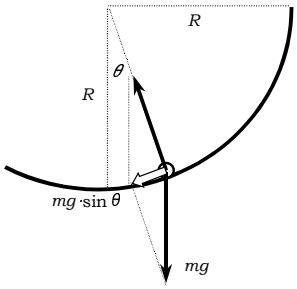
(2)　小球と台を合わせた系に対しては、x 軸方向には外からの力は働かないので、系の重心の x 座標は変化しない。このことから、x_1 と x_2 の間に成り立つ関係式をもとめなさい。

(3)　小球の単振動の中心位置の x 座標を求めなさい。

(4)　小球の単振動の振幅を求めなさい。

(5)　小球の単振動の周期を求めなさい。

入試問題研究　第 22 回　1999 年　東京大学　単振動　（解説）



Ⅰ　台が固定されている場合

(1) 小球が受ける復元力　$f=-mg\sin\theta=-\dfrac{mg}{R}x$ であるので、運動方程式は

$ma=-\dfrac{mg}{R}x$ である。

(2) 運動方程式　$ma=-\dfrac{mg}{R}x$　より、$a=-\dfrac{g}{R}x$　だから、単振動の条件式

$a=-\omega^2 x$ と比較して、角振動数は　$\omega=\sqrt{\dfrac{g}{R}}$　だ。したがって、周期の公式より　$T=\dfrac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\dfrac{R}{g}}$　である。

Ⅱ　台が動く場合

(1) 小球と台の間に働く力は、「作用・反作用の法則」より、等しい大きさで向きは反対である。したがって、その x 軸方向成分も同様だから、x 軸方向の運動方程式はそれぞれ、$f_1=m_1a_1$、$-f_2=m_2a_2$　である。したがって、a_1 と a_2 の間に成り立つ関係式は　$m_1a_1=-m_2a_2$　…①　である。

(2) 重心の x 座標は　$x_G=\dfrac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}=\dfrac{m_1L}{m_1+m_2}$ であるので、$m_1x_1+m_2x_2=m_1L$ …②　である。

(3) 単振動の中心はつりあいの位置だから、小球が台の底にいるときだ。したがって、小球と台の位置が一致するので $x_1=x_2$ である。(2)の関係式に代入して　$m_1x_1+m_2x_1=m_1L$ だから、小球の単振動の中心は　$x_1=\dfrac{m_1L}{m_1+m_2}$ の位置（重心位置）である。

(4) 小球の単振動の振幅は「最初の位置（速度ゼロの位置は最大変位の位置）と中心（重心位置）との距離」 だから、$A_1=L-x_1=L-\dfrac{m_1L}{m_1+m_2}=\dfrac{m_2L}{m_1+m_2}$ である。 参考までに求めると、台の振幅は 「最初の位置と中心との距離」だから、$A_2=x_1-0=\dfrac{m_1L}{m_1+m_2}$　である。

(5) 小球の運動を考えてみよう。小球は重力　m_1g　と台からの垂直抗力 N_1 を受ける。単振動の中心を原点として方程式を作れば良い。単振動の中心からの距離は　$X=x_1-\dfrac{m_1L}{m_1+m_2}$ …④　だ。 垂直抗力の斜面方向の力の成分は $-mg\times\dfrac{x_1-x_2}{R}$　と近似できるのだから、小球の運動方程式は　$-\dfrac{x_1-x_2}{R}m_1g=m_1a_1$ …③　である。②を代入して x_2 を去すると、$-\dfrac{x_1-\left(\dfrac{m_1(L-x_1)}{m_2}\right)}{R}m_1g=m_1a_1$ である。これを整理してまとめると、$-\dfrac{m_2x_1-m_1(L-x_1)}{R}g=m_2a_1$ だから、④式より、$x_1=X+\dfrac{m_1L}{m_1+m_2}$ を代入して整理すると、$-\dfrac{(m_1+m_2)\left(X+\dfrac{m_1L}{m_1+m_2}\right)-m_1L}{R}g=m_2a_1$　である。よって、$a_1=-\dfrac{(m_1+m_2)g}{m_2R}X$　より、$\omega=\sqrt{\dfrac{(m_1+m_2)g}{m_2R}}$　になる。 これより、小球の単振動の周期は $T=\dfrac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\dfrac{m_2R}{(m_1+m_2)g}}$　である。

別解　台からみた小球の運動を考える。台の加速度を右向きに a_2　、台からみた小球の加速度を a とする。運動方程式は、小球が $m_1a=-m_1a_2-m_1g\sin\theta\cos\theta$、台が　$m_2a_2=m_1g\cos\theta\sin\theta$　だから、近似式　$\sin\theta\approx\theta$、$\cos\theta\approx1$、$\theta\approx\dfrac{x}{R}$　適用すると、$m_1a=-m_1a_2-m_1g\cdot\dfrac{x}{R}$　、$m_2a_2=m_1g\cdot\dfrac{x}{R}$　である。これより、台の加速度 a_2 を消去して、$a=-\left(\dfrac{m_1}{m_2}+1\right)\dfrac{gx}{R}=-\left(\dfrac{m_1+m_2}{m_2}\cdot\dfrac{g}{R}\right)x$　である。よって、この単振動の角振動数は $\omega=\sqrt{\dfrac{m_1+m_2}{m_2}\cdot\dfrac{g}{R}}$　であるので、単振動の周期は　$T=2\pi\sqrt{\dfrac{m_2R}{(m_1+m_2)g}}$　になる。