

入試問題研究 第220回 2007年 東京工業大学 ③ 波動

※ なお、問題文は一部修正（選択肢などを省く）している場合があります。
元問題は予備校サイト（代々木ゼミナール）で入手できます。

[3]

電磁波は電場と磁場が振動しながら伝わる横波である。ある地点での電場の時間変化を図1に示す。波の最も高いところを山、最も低いところを谷と呼ぶ。また、電磁波の速さを $c=3.0 \times 10^8 \text{ m/s}$ とする。ある人工衛星が、波長 $\lambda=0.30 \text{ m}$ の電磁波を発信している。この人工衛星の仰角 θ を測定する装置を開発する。仰角とは人工衛星を見上げる角度のことで、水平方向が 0° 、真上が 90° である。

まず図2に示すような2台の受信器A、Bと時間差計測器からなる装置を用意した。受信器Aの真下に受信器Bを置き、その間隔 d を 3.0 m にした。この装置は受信器Aが電場の山を検出してから受信器Bが電場の山を最初に検出するまでの時間差を計測する。次に装藩をテストするため、人工衛星と同じ波長の電磁波を発信する発信器を装置から十分離れた位置に置いた。以下の問いに答えよ。必要なら「 $\sin \theta$ から角度 θ を求める表」を用いてもよい。

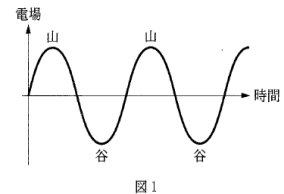


図1

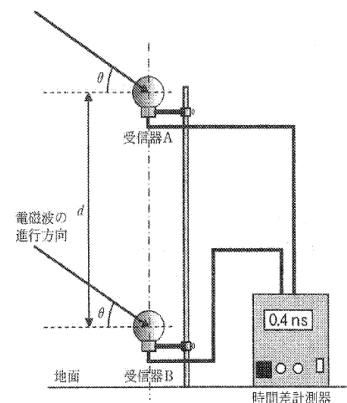


図2

- この電磁波の周波数 f [Hz]を求めよ。
- 発信器を仰角 $\theta = 0^\circ$ の場所に置いたところ、2台の受信器で同時刻に山が検出された。発信器を少しずつ高く上げて θ を少しずつ大きくしていくと、2つの受信器の検出時刻に差が生じ、その差は徐々に大きくなっていった。この時間差 Δt [s]を θ で表せ。
- 仰角 θ をさらに大きくすると、ある角度で再び時間差が0になってしまう。この時の角度 θ_0 を求めよ。
- 前問(c)で述べたことが起こるため、この装置では θ を一つに決めることができない。このことを考えに入れて時間差が Δt のときの θ の正弦 ($\sin \theta$) を小さい方から3つ求めよ。
- 角度 θ_0 を大きくするためには2台の受信器の間隔を小さくすればよい。2台の受信器の間隔 d を 0.30 m にした場合には、 θ_0 は何度になるか。
- この時間差計測器の測定精度には限界があり、 0.1 ns ($1 \text{ ns} = 1 \times 10^{-9} \text{ s}$) 未満の時間差は切り捨てられてしまう。たとえば、 0.2 ns 以上 0.3 ns 未満の時周差は 0.2 ns と測定される。いま、間隔 d が 3.0 m の装置で時間差が 0.5 ns と検出されたとき、仰角 θ は何度から何度の範囲になるか。ただし、 θ は d が 3.0 m の装置での θ_0 より小さいとする。この同じ電磁波を間隔 d が 0.30 m の装置で計測すると時間差は何 ns になるか。これから求められる仰角 θ の範囲は何度から何度になるか。
- このように受信器の間隔を小さくすると θ_0 は大きくなるが、求められる θ の精度は悪くなってしまう。 θ_0 を大きく保ちつつ高精度の計測を行なうため、3台の受信器A、B、Cを用いる。BはAの真下に 3.0 m 離して設置し、CはAの真下に 0.30 m 離して設置した。この装置で実際の人工衛星を観測したところ、受信器Aが電場の山を検出してから受信器B、受信器Cが最初に電場の山を検出するまでの時間はそれぞれ 0.4 ns 、 0.7 ns であった。人工衛星の仰角 θ は何度から何度の範囲にあるか。

$\sin \theta$ から角度 θ を求める表

$\sin \theta$	θ	$\sin \theta$	θ	$\sin \theta$	θ	$\sin \theta$	θ
0.00	0.0°	0.20	11.5°	0.40	23.6°	0.60	36.9°
0.01	0.6°	0.21	12.1°	0.41	24.2°	0.61	37.6°
0.02	1.1°	0.22	12.7°	0.42	24.8°	0.62	38.3°
0.03	1.7°	0.23	13.3°	0.43	25.5°	0.63	39.1°
0.04	2.3°	0.24	13.9°	0.44	26.1°	0.64	39.8°
0.05	2.9°	0.25	14.5°	0.45	26.7°	0.65	40.5°
0.06	3.4°	0.26	15.1°	0.46	27.4°	0.66	41.3°
0.07	4.0°	0.27	15.7°	0.47	28.0°	0.67	42.1°
0.08	4.6°	0.28	16.3°	0.48	28.7°	0.68	42.8°
0.09	5.2°	0.29	16.9°	0.49	29.3°	0.69	43.6°
0.10	5.7°	0.30	17.5°	0.50	30.0°	0.70	44.4°
0.11	6.3°	0.31	18.1°	0.51	30.7°	0.71	45.2°
0.12	6.9°	0.32	18.7°	0.52	31.3°	0.72	46.1°
0.13	7.5°	0.33	19.3°	0.53	32.0°	0.73	46.9°
0.14	8.0°	0.34	19.9°	0.54	32.7°	0.74	47.7°
0.15	8.6°	0.35	20.5°	0.55	33.4°	0.75	48.6°
0.16	9.2°	0.36	21.1°	0.56	34.1°	0.76	49.5°
0.17	9.8°	0.37	21.7°	0.57	34.8°	0.77	50.4°
0.18	10.4°	0.38	22.3°	0.58	35.5°	0.78	51.3°
0.19	11.0°	0.39	23.0°	0.59	36.2°	0.79	52.2°

入試問題研究 第220回 2007年 東京工業大学 ③ 波動

[3]

- (a) $v=f\lambda$ の公式より $3.0\times 10^8=f\times 0.30$ より、電磁波の周波数は $f=1.0\times 10^9$ [Hz] (1.0 [GHz])である。
- (b) 距離の差が時間の遅れになるので、 $d\sin\theta=c\Delta t$ が成立する。よって、2つの受信器の検出時刻は $\Delta t=\frac{d\sin\theta}{c}$ になる。具体的な数値を代入して、 $\Delta t=10^{-8}\cdot\sin\theta$ [s]である。
- (c) 距離の差 $d\sin\theta$ が波長に等しいとき、再び時間差が0になる。よって、この時の角度 θ_c は $d\sin\theta_c=\lambda$ を満たす。よって、 $\sin\theta_c=\frac{\lambda}{d}=0.10$ だから、表より、 $\theta_c=5.7^\circ$ である。
- (d) 前問(c)で述べたことから、 $d\sin\theta=m\lambda+c\Delta t$ (m は整数)が成立する。時間差が Δt のときの θ の正弦の値は $\sin\theta=\frac{m\lambda+c\Delta t}{d}$ より、最も小さい値は $\sin\theta_0=\frac{c\Delta t}{d}=10^8\cdot\Delta t$ 、2番目が $\sin\theta_1=\frac{\lambda+c\Delta t}{d}=0.10+10^8\cdot\Delta t$ 、 $\sin\theta_2=\frac{2\lambda+c\Delta t}{d}=0.20+10^8\cdot\Delta t$ である。
- (e) 角度 θ_c は $\sin\theta_c=\frac{\lambda}{d}$ を満たすので、2台の受信器の間隔 d を 0.30m にした場合には、 $\sin\theta_c=1.0$ だから、 $\theta_c=90^\circ$ である。
- (f) 時間差が 0.5ns と検出されたとき、実際の時間差は $0.5\times 10^{-9}\leq\Delta t<0.6\times 10^{-9}$ である。
間隔が 3.0m では、 $\Delta t=\frac{d\sin\theta_c}{c}=10^{-8}\cdot\sin\theta_c$ より $5\times 10^{-9}\leq 10^{-8}\cdot\sin\theta_c<0.6\times 10^{-9}$ が成立する。よって、 $0.05\leq\sin\theta_c<0.06$ になるので、表より $2.9^\circ\leq\theta_c<3.4^\circ$ である。
間隔が 0.30m では $\Delta t=\frac{d\sin\theta_c}{c}$ より、間隔が 10 分の 1 になるので、計算上では時間差も 10 分の 1 になり $5\times 10^{-11}\leq\Delta t<6\times 10^{-11}$ となる。測定精度は 0.1ns (10^{-10} s) であるので、時間差の下限値は測定値としてゼロ。上限値は有効数字1桁だから切り上げて、測定値として 0.1ns になる。 $\Delta t=\frac{d\sin\theta_c}{c}$ に戻して、 $\sin\theta_c$ を求めると、 $0\leq\sin\theta_c<0.1$ である。
表より $0^\circ\leq\theta_c<5.7^\circ$ になる。これより、測定精度がより悪くなっていることが分かる。
- (g) θ_c を大きく保ちつつ高精度の計測を行なうため、3台の受信器 A、B、C を用いる。B は A の真下に 3.0m 離して設置し、C は A の真下に 0.30m 離して設置した。この装置で実際の人工衛星を観測したところ、受信器 A が電場の山を検出してから受信器 B、受信器 C が最初に電場の山を検出するまでの時間はそれぞれ 0.4ns、0.7ns であった。
 $d\sin\theta=m\lambda+c\Delta t$ と測定装置の精度を含めて考えると、受信器 A と受信器 B において、 $0.3\times m+(3\times 10^8)\times(0.4\times 10^{-9})\leq 3\sin\theta<0.3\times m+(3\times 10^8)\times(0.5\times 10^{-9})$ の関係式が成立する。よって、条件は $0.1m+0.04\leq\sin\theta<0.1m+0.05$ …①である。
受信器 A と C においても同様に、 $d\sin\theta=m\lambda+c\Delta t$ と測定装置の精度を含めて考えると、 $0.3\times m+(3\times 10^8)\times(0.7\times 10^{-9})\leq 3\sin\theta<0.3\times m+(3\times 10^8)\times(0.8\times 10^{-9})$ の関係が成立する。「受信器 A と受信器 C の間隔が 0.3m では1波長以上のずれはない！」ことから、 $0.21\leq 0.3\sin\theta<0.24$ が成立する。よって条件は $0.7\leq\sin\theta<0.8$ …②である。
以上より、①、②より、 $0.7\leq\sin\theta<0.8$ かつ $0.1m+0.04\leq\sin\theta<0.1m+0.05$ が成立するので $m=7$ でなければならないことが分かる。
よって、このときの条件は $0.74\leq\sin\theta<0.75$ である。三角関数表より、人工衛星の仰角 θ を求めると 47.7° から、 48.6° の範囲である。