

入試問題研究 第23回 2004年早稲田大学 ④ 電気

図1のように、2本の長い直線の金属線を平行に置く。2本の金属線の間隔は a であり、2本の金属線が作る平面は床に平行である。この2本の金属線に、図1のようにスイッチ、抵抗(抵抗値 R)、平行板コンデンサー(電気容量 C_0)をつないで、回路を作るさらに、この2本の金属線に直角に金属棒Aを渡す。この金属棒Aを、2本の金属線との電気的な接触を保

ちつつ、常に一定の速さ v で図1の右から左に手で動かす。金属線と金属棒Aの間の摩擦は無視できるものとする。このとき、床に垂直に下から上へ磁束密度 B の一様な磁界があるとし、以下の間に答えよ。

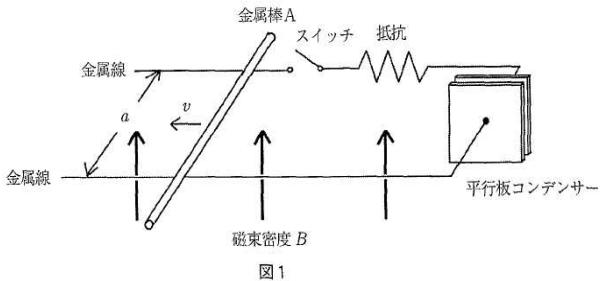


図1

はじめに、スイッチが開いている状態で、金属棒Aを一定の速さ v で動かした。

問1 金属棒Aが金属線と接触している2点間の電位差はいくらか。

つぎに、金属棒Aを一定の速さ v で動かしたまま、スイッチを閉じた。

問2 スイッチを閉じた直後に流れる電流はいくらか。

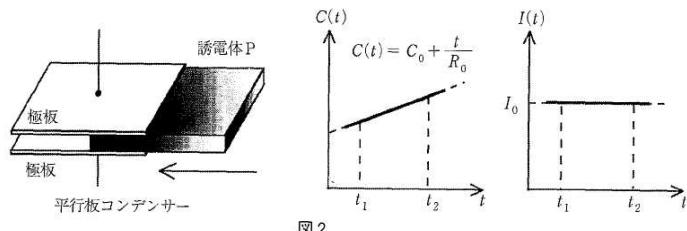
問3 十分に時間がたつと回路に電流が流れなくなった。このとき、コンデンサーに蓄えられている電荷はいくらか。

問4 スイッチを閉じてから電流が流れなくなるまでに、手が金属棒Aにした仕事はいくらか。

問5 スイッチを閉じてから電流が流れなくなるまでに、抵抗で発生するジュール熱はいくらか。

さらに、金属棒Aを一定の速さ v で動かしたまま、図2に示すように、平行板コンデンサーの極板間に誘電体Pを手でゆっくりと挿入した。その結果、コンデンサーの容量は時間とともに変化し、時刻 t の電気容量 $C(t)$ は

$$C(t) = C_0 + \frac{t}{R_0} \quad (R_0 \text{ は定数}) \text{として表さ}$$



れた。このとき、 $t=t_1$ から $t=t_2$ まで、回路には時刻 t によらず一定の電流 I_0 が流れた。極板と誘電体Pとの間の摩擦は無視できるものとする。

金属棒Aが金属線と接触している2点間の電位差を V_0 として以下の間に答えよ。

問6 コンデンサーには一定の電流 I_0 が流れこむため、時刻 t にコンデンサーに蓄えられている電荷 $Q(t)$ は $Q(t) = Q_0 + I_0 t$ (Q_0 は定数)と表される。回路における各点での電位を考えると、次に式が成り立つ。

$$V_0 = RI_0 + \boxed{\quad} \quad \dots \dots \dots \quad (1)$$

(1)式の空欄に当てはまる量を C_0 、 R_0 、 Q_0 、 I_0 、 t を用いて表せ。

問7 (1)の式は $t=t_1$ から $t=t_2$ の間で、常に成り立つ。このことから、 I_0 を V_0 、 R_0 、 R を用いて表せ。

問8 $t=t_1$ から $t=t_2$ までに、抵抗で発生したジュール熱 E_0 はいくらか。 V_0 、 R_0 、 R 、 t_1 、 t_2 を用いて表せ。

問9 $t=t_1$ から $t=t_2$ までの間に手が金属棒Aにした仕事は、 E_0 の何倍か。 R_0 、 R を用いて表せ。

問10 $t=t_1$ から $t=t_2$ までの間に手が誘電体Pにした仕事は、 E_0 の何倍か。 R_0 、 R を用いて表せ。

入試問題研究 第23回 2004年早稲田大学 ④ 電気

問1 公式より、金属棒に発生する誘導起電力は $V = \nu B a$ である。

問2 スイッチを入れた直後はコンデンサーの電圧はゼロだから、電流は $I = \frac{V}{R} = \frac{\nu B a}{R}$ である。

問3 十分二時間がたった後は、充電電流は流れない。よって、抵抗による電圧降下は無くなり、コンデンサーの両端の電圧は $V = \alpha \nu B$ になるから、蓄えられた電荷は $Q = C_0 V = C_0 \nu B a$ になる。

問4 手がした仕事は流れた電気量×電圧だから、 $QV = C_0 V^2 = C_0 \nu^2 B^2 a^2$ である。

問5 コンデンサーに蓄えられているエネルギーは $\frac{1}{2} QV = \frac{C_0 \nu^2 B^2 a^2}{2}$ である。手がした仕事とコンデンサーのエネルギーの差がジュール熱により失われたエネルギーだから、 $\frac{C_0 \nu^2 B^2 a^2}{2}$ である。

問6 電流が I_0 流れるから、抵抗の電圧降下は $I_0 R$ になる。金属棒の両端の電圧は V_0 だから、コンデンサーの両端の電圧は $V_0 - I_0 R$ になる。

コンデンサーの公式に代入して、 $Q(t) = C(t) \cdot (V_0 - I_0 R)$ だから、 $V_0 = I_0 R + \frac{Q(t)}{C(t)}$ である。

よって、 $\frac{Q(t)}{C(t)} = \frac{Q_0 + I_0 t}{C_0 + \frac{t}{R_0}} = \frac{(Q_0 + I_0 t) R_0}{C_0 R_0 + t}$ である。

問7 (1) 式を t で整理すると、 $V_0 C_0 R_0 - Q_0 R_0 - I_0 R C_0 R_0 = (I_0 R + I_0 R_0 - V_0) t$ の関係式が得られる。左辺は定数だから、右辺が t により変化しないから、係数は $I_0 R + I_0 R_0 - V_0 = 0$ である。

よって、そのときの電流値は $I_0 = \frac{V_0}{R_0 + R}$ である。

問8 ジュール熱の公式 $Q = I^2 R t$ より、抵抗に発生するジュール熱は $E_0 = \left(\frac{V_0}{R_0 + R} \right)^2 R (t_2 - t_1)$

問9 $W = qV$ の公式より、金属棒に手がした仕事は $W = I_0 (t_2 - t_1) V_0 = \frac{V_0^2 (t_2 - t_1)}{R_0 + R}$ であるか

ら、 $W = \frac{R_0 + R}{R} \cdot E_0$ であるので、 $\frac{R_0 + R}{R}$ 倍である。

問10 コンデンサーの電圧は $V = V_0 - I_0 R = V_0 - \frac{R}{R_0 + R} \cdot V_0 = \frac{R_0}{R_0 + R} \cdot V_0$ で一定であるから、

エネルギー増加分は $\frac{1}{2} C(t_2) V^2 - \frac{1}{2} C(t_1) V^2$ より、コンデンサーのエネルギー増加分は

$\frac{V^2 (t_2 - t_1)}{2 R_0} = \frac{R_0 V_0^2}{2 (R_0 + R)^2} \cdot (t_2 - t_1) = \frac{R_0}{2 R} \cdot E_0$ である。エネルギー保存の法則より、手が金属棒

にした仕事と誘電体に手がした仕事の和(外からした仕事の和)と、ジュール熱に変わったエネルギーとコンデンサーのエネルギーの増加分の和は等しい。誘電体にした仕事を W として

$\frac{R_0 + R}{R} \cdot E_0 + W = E_0 + \frac{R_0}{2 R} \cdot E_0$ より $W = \left(1 + \frac{R_0}{2 R} - \frac{R_0 + R}{R} \right) E_0 = -\left(\frac{R_0}{2 R} \right) E_0$ になる。これよ

り、誘電体に手がした仕事はジュール熱の $-\left(\frac{R_0}{2 R} \right)$ 倍になる。