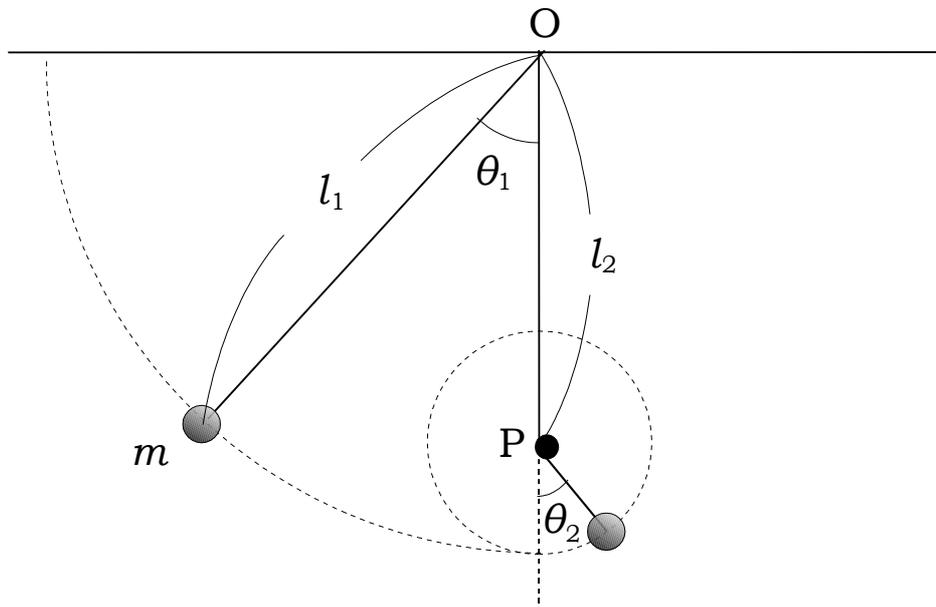


入試問題研究 第26回 2004年 神戸大学 ② 円運動

II 次の文章を読んで、問1～4に答えなさい。解答欄には導出の過程も示しなさい。

長さ l_1 の糸の端に質量 m のおもりをつけた単振り子の運動を考える。この単振り子は、下の図のように、支点 O の真下 l_2 の位置 P 点にある太さが無視できる細いくぎによって、左右で支点の異なる振動をしている。振動は支点 O と点 P を含む図のような鉛直面内で起きているとする。糸が鉛直線となす左右の最大の角度をそれぞれ θ_1 、 θ_2 とする。また、おもりの大きさやその運動に対する空気抵抗、糸の太さや質量は無視できるものとする。



問1 糸がくぎに触れる直前のおもりの速さと、そのときの糸の張力を求めなさい。

問2 θ_1 と θ_2 の関係を求めなさい。

問3 振れの角度が小さいとき、糸がくぎに触れている時間を求めなさい。

問4 角度 θ_1 でおもりを静かに放し、糸がくぎに触れた後、たらずに、ぐるっとひとまわりするための条件を θ_1 、 l_1 、 l_2 を使った式で表しなさい。

入試問題研究 第26回 2004年 神戸大学 ② 円運動 (解答・解説)

問1 最下点を重力による位置エネルギーの基準点とする。手を離す直前の力学的エネルギーは $mg l_1(1-\cos\theta_1)$ である。最下点を通過するときの速度を v とすると、最下点での力学的エネルギーは $\frac{1}{2}mv^2$ である。力学的エネルギー保存の法則より、両者は等しいから $mg l_1(1-\cos\theta_1)=\frac{1}{2}mv^2$ ……① が成立する。また、このとき、重力 mg と張力 T とで作られる向心力により円運動しているから、 $T-mg=m\cdot\frac{v^2}{l_1}$ ……② が成立する。 v を消去して $T=mg+2mg(1-\cos\theta_1)$ だから、糸の張力は $3mg-2mg\cos\theta_1$ である。

問2 くぎにかかった後、おもりが最高点に達したとき、振り子の長さは l_1-l_2 、角度が θ_2 であるから、力学的エネルギーは $mg(l_1-l_2)(1-\cos\theta_2)$ になる。力学的エネルギー保存の法則より、 $mg l_1(1-\cos\theta_1)=mg(l_1-l_2)(1-\cos\theta_2)$ が成立する。したがって、 θ_1 と θ_2 の間には $l_1(1-\cos\theta_1)=(l_1-l_2)(1-\cos\theta_2)$ の関係式が成立する。

問3 単振り子のふれの角が小さいときは単振動になり、周期の公式は $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ である。

この単振り子の長さは l_1-l_2 だから、この単振り子の周期は $T=2\pi\sqrt{\frac{l_1-l_2}{g}}$ である。

くぎに触れてから離れるまでの動きは単振り子の半周期分に相当する。

よって、くぎに触れてから離れるまでの時間は $\pi\sqrt{\frac{l_1-l_2}{g}}$ である。

問4 $h=l_1(1-\cos\theta_1)$ 、 $l=l_1-l_2$ とする。おもりが一回転するには最高点で糸がたるまないことが条件になる。すなわち糸の張力が存在することだ。

最高点での速度を v とし、手を離れたときと最高点を通過するときにおける力学的エネルギー保存の法則より $mgh=mg\cdot 2l+\frac{1}{2}mv^2$ ……① が成立する。

最高点での糸の張力を T とすると、円運動するため最高点を通過するときの向心力は糸の張力と重力で作られるため $T+mg=m\cdot\frac{v^2}{l}$ ……② が成立する。

また、最高点を通過するとき糸がたるまない条件は $T>0$ ……③ である。

①より $mv^2=2mgh-4mgl$ だから、②、③より $T=m\cdot\frac{v^2}{l}-mg=\frac{2mgh-5mgl}{l}>0$

が成立する。よって、その条件は $2h>5l$ である。

したがって、糸がたるまずにおもりが一回転できる条件は $2l_1(1-\cos\theta_1)>5(l_1-l_2)$ である。