入試問題研究　第29回　2003年　東北大学　後期　②　電気

図1のように、電流計で電流を測ることによって電気容量や抵抗値を測定する装置がある。装置には二つの測定端子があり、内部で抵抗（抵抗値 r ）と電源（起電力 E ）と電流計が直列に接続されている。電流計および電源の内部抵抗は無視できるものとして、以下の問いに答えよ。ただし、結果だけでなく、考え方や計算の過程も記せ。

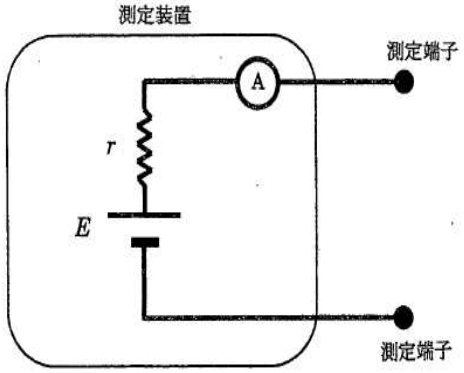

図　1

(1)　$r=0.0$ Ωにした装置の測定端子にコンデンサーを接続し、 E を時間的に一定の割合 $\dfrac{\Delta E}{\Delta t}=2.0$ V/s で増加させたところ、電流計は5.0 μAを示した。このコンデンサーの電気容量 C の値を求めよ。

(2) こんどは、 E を一定値 E_1 、 $r=r_1$ として以下の実験を行った。10 Ωの抵抗を測定端子に接続すると、電流計は1.0 Aを示した。次に、18 Ωの抵抗を測定端子に接続すると、電流計は0.60 Aを示した。このときの E_1 と r_1 の値をそれぞれ求めよ。

(3) いま、2.0 Ω、3.5 Ω、5.0 Ω、10 Ω、12 Ωの抵抗がそれぞれ1個ずつある。この中から3個の抵抗（抵抗値 r_a 、 r_b 、 r_c ）を選んで図2のように接続し、6.0 Ωにしたい。そのためには r_a 、 r_b 、 r_c の値をいくらにすればよいか答えよ。

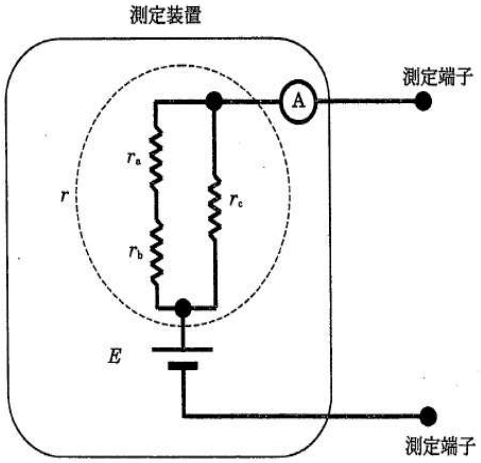

図　2

(4) ある日、 E を一定値 E_2 に設定し、測定装置の内部の抵抗に書かれた値を信じて $r=r_s$ とし、測定端子に接続された抵抗を測定したところ、抵抗値 R_m を得た。その後、 r の値を確認したところ、真の値 r_0 は $1.1r_s$ であることがわかった。このとき、測定端子に接続された抵抗の真の値 R_0 を、 R_m と r_s を用いて表せ。ただし、電流計の示す値および E の値に誤差はなかったものとする。

(5) (4)のように実際の実験では、測定装置の内部の抵抗に書かれた値 r_s は真の値 r_0 に等しいとは限らない。この場合 $r=r_s$ と信じて測定を行うと、得られる抵抗値 R_m は誤差を含み、真の値 R_0 とは異なる。 r_s の相対誤差が10 %であるとき、 R_m の相対誤差が0.1 %以下であるための R_m と r_s が満たすべき関係を求めよ。ただし、電流計の示す値および E の値に誤差はないものとする。

また、 r_s の相対誤差を $\left|\dfrac{r_s-r_0}{r_s}\right|\times 100$ [%]、 R_m の相対誤差を $\left|\dfrac{R_m-R_0}{R_m}\right|\times 100$ [%]と定義する。

入試問題研究　第29回　2003年　東北大学　後期　②　電気　解答・解説

(1) コンデンサーの電気容量を C とする。t [s] でコンデンサーの電圧が $2t$ [V] 上昇するから、コンデンサーに流れ込んだ電気量は $2Ct$ [C] になる。その間の電流値が 5.0 μA より流れた電気量は $5.0\times10^{-6}\times t$ [C] で、$2Ct=5.0\times10^{-6}\times t$ が成立する。よって $C=2.5\times10^{-6}$ より、コンデンサーの電気容量は 2.5 [μF] である。

(2) オームの法則より、$E_1=1.0\times(r_1+10)$ ・・・①、$E_1=0.60\times(r_1+18)$ ・・・② が成立する。①、②より、これを解いて $r_1=2$ 、$E_1=12$ である。

(3) 適当に組み合わせを考えると大変だから、除外できる組み合わせを考えて処理する。

条件 1　r_c が並列につながるので、並列抵抗それぞれの値は 6Ω 未満でなければならない。

条件 1 より r_c は 10 Ω か 12 Ω のどちらかしかない。

条件 2　r_a 、r_b の直列接続の合成抵抗値は、$r_c=12\,\Omega$ のとき $12\,\Omega$ 、$r_c=10\,\Omega$ のとき $15\,\Omega$ である。

条件 1,2 をともに満たす抵抗の組み合わせは r_a, r_b =2.0 Ω、10 Ω と $r_c=12$ Ω とすぐに見つけることができる。（筆者感想：この小問の存在理由はなんだろうか？ 前後とはつながらないし、大きな意味もなさそうだし… 手当たり次第に抵抗を選んで合成抵抗の公式を使っていると時間が足りなくなることを狙ったのだろうか？）

(4) 電流計に流れている電流値を I_0 [A] とする。オームの法則より、$E_2=I_0(r_s+R_m)$ ・・・①、$E_2=I_0(1.1r_s+R_0)$ ・・・② が成立する。①、②より $r_s+R_m=1.1r_s+R_0$ が得られるから、真の抵抗値は $R_0=R_m-0.1r_s$ と表すことができる。

(5) (4) と同様に考えて $E_2=I_0(r_s+R_m)$ ・・・①、$E_2=I_0(r_0+R_0)$ ・・・② が成立する。これより、$\left|\dfrac{R_m-R_0}{R_m}\right|=\left|\dfrac{r_s-r_0}{r_s}\cdot\dfrac{r_s}{R_m}\right|$ の関係式が成立する。

ここで R_m の相対誤差が 0.1%以下であるための条件は $\left|\dfrac{R_m-R_0}{R_m}\right|<0.001$ が成立することだ。また、r_s の相対誤差が 10%であるから $0.1=\left|\dfrac{r_s-r_0}{r_s}\right|$ と表すことができる。

したがって、R_m の相対誤差が 0.1%以下である条件は $0.001>\left|\dfrac{r_s-r_0}{r_s}\cdot\dfrac{r_s}{R_m}\right|=0.1\times\left|\dfrac{r_s}{R_m}\right|$ と表すことができる。

以上より、R_m の相対誤差が 0.1%以下になるための条件は $0.01>\left|\dfrac{r_s}{R_m}\right|$ である。