入試問題研究　第30回　2004年　大阪大学　前期　② 電気（コンデンサー）

極板の面積が A 、間隔が h で、極板間が真空の平行板コンデンサーの電気容量は、極板の端の影響を無視すると、 $\dfrac{\epsilon_0 A}{h}$ で与えられる。ここで、 ϵ_0 は真空の誘電率である。

図に示すように、面積が A の4枚の薄い金属板K、L、M、Nが、端をそろえて真空中にお互いに平行に置かれている。金属板KN間の距離を D 、金属板LM間の距離を d （ $d<D$ ）とする。金属板には、抵抗、スイッチS1、S2、および内部抵抗の無視できる電池B1、B2が図のように接続されている。電池B1の起電力は V （ $V>0$ ）である。最初の状態ではスイッチS1、S2は開いていた。そのとき、金属板K、L、M、N上の電気量はそれぞれ0で、すべての金属板の電位は等しかった。金属板の端の影響は無視できる。隣りあう金属板間に生じる電界（電場）はそれぞれ一様であるとして、以下の問いに答えよ。

スイッチS1を閉じると抵抗が発熱し、しばらくすると発熱はとまった。このとき、金属板Lにたくわえられた電気量は q となった。

問1　q を V 、 A 、 D 、 d 、 ϵ_0 のうち必要なものを用いて表せ。

問2　金属板LM間の電界の強さを q 、 A 、 D 、 d 、 ϵ_0 のうち必要なものを用いて表せ。

問3　金属板LM間にたくわえられたエネルギーを q 、 V 、 A 、 D 、 d 、 ϵ_0 のうち必要なものを用いて表せ。

問4　抵抗で発生した熱量を、 V 、 A 、 D 、 d 、 ϵ_0 のうち必要なものを用いて表せ。

次に、スイッチS1を開いてからスイッチS2を閉じたところ、金属板Kにたくわえられた電気量は Q （ $Q>0$ ）に、金属板Nにたくわえられた電気量は $-Q$ になった。

問5　このとき、金属板KL間、および金属板LM間の電界の強さを、 Q 、 q 、 A 、 D 、 d 、 ϵ_0 のうち必要なものを用いて表せ。

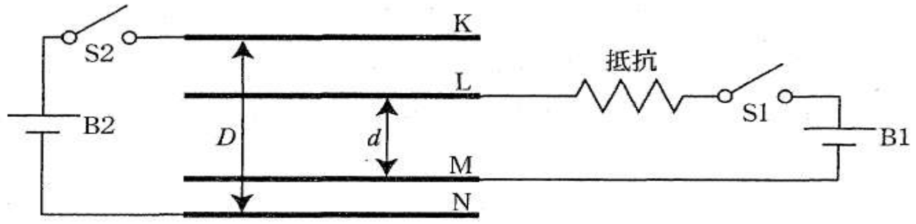
問6　電池B2の起電力を、 Q 、 q 、 A 、 D 、 d 、 ϵ_0 のうち必要なものを用いて表せ。

次に、スイッチS2を開いてからスイッチS1を閉じた。しばらくすると、金属板Lにたくわえられた電気量は q' になった。

問7　q' を Q 、 q 、 A 、 D 、 d 、 ϵ_0 のうち必要なものを用いて表せ。

最後に、スイッチS1を閉じたままスイッチS2を閉じた。しばらくすると、金属板Kにたくわえられた電気量は Q から $Q+\Delta Q$ になり、金属板Lにたくわえらえた電気量は q' から $q'+\Delta q'$ になった。また、金属板Mにたくわえられた電気量は $-q'-\Delta q'$ に、金属板Nにたくわえられた電気量は $-Q-\Delta Q$ になった。

問8　ΔQ と $\Delta q'$ を、 V 、 Q 、 A 、 D 、 d 、 ϵ_0 のうち必要なものを用いて、それぞれ表せ。



入試問題研究　第30回　2004年　大阪大学　前期　② 電気（コンデンサー）　解答・解説

問1　極板LMにより作られるコンデンサーの電気容量は $\dfrac{\epsilon_0 A}{d}$ だから、 $q=\dfrac{\epsilon_0 A V}{d}$ である。

問2　電界の強さは電気力線の密度に等しい。極板から出る電気力線の本数は $\dfrac{q}{\epsilon_0}$ で、面積が A だから、電界の強さは $\dfrac{q}{\epsilon_0 A}$ である。

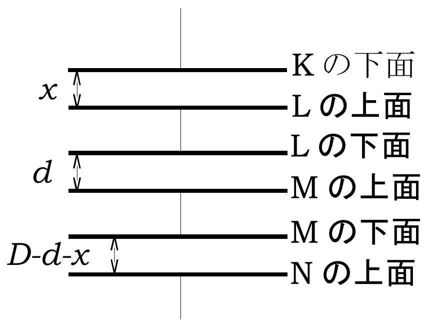
[別解] コンデンサーの公式 $Q=CV$ より、 $q=\dfrac{\epsilon_0 A}{d}V$ が成立する。電界の公式 $E=\dfrac{V}{d}$ を使って、電界を求めると、極板間の電界は $E=\dfrac{q}{\epsilon_0 A}$ である。

問3　コンデンサーのエネルギーの公式 $U=\dfrac{1}{2}CV^2$ より、 $U=\dfrac{1}{2}\dfrac{\epsilon_0 A}{d}V^2=\dfrac{\epsilon_0 A V^2}{2d}$ である。

問4　電池が供給したエネルギーは $W=qV$ だから、 $W=\dfrac{\epsilon_0 A V^2}{d}$ である。コンデンサーにたくわえられたエネルギーとの差 $\dfrac{\epsilon_0 A V^2}{2d}$ が抵抗での発熱（熱エネルギー）になる。

問5　問2の電界の求め方（電気力線の密度が電界に等しい）を利用すればよい。電気力線はKN間（ $Q \to -Q$ ）と、LM間（ $q \to -q$ ）にそれぞれ存在する。したがって、KL間には $\dfrac{Q}{\epsilon_0}$ 本、LM間には $\dfrac{Q+q}{\epsilon_0}$ 本で、それぞれの電界は、KL間が $\dfrac{Q}{\epsilon_0 A}$ 、LM間が $\dfrac{Q+q}{\epsilon_0 A}$ である。

[別解] それぞれの金属板間がコンデンサーであると考える（金属板L、Mは表と裏を別々の電極と考える）。



公式 $Q=CV$ より、 $Q=\dfrac{\epsilon_0 A}{x}V_{KL}=\dfrac{\epsilon_0 A}{D-d-x}V_{MN}$ 、 $Q+q=\dfrac{\epsilon_0 A}{d}V_{LM}$ が成立する。電界の公式 $E=\dfrac{V}{d}$ より、それぞれの電界は $E_{KL}=E_{MN}=\dfrac{Q}{\epsilon_0 A}$ 、 $E_{LM}=\dfrac{Q+q}{\epsilon_0 A}$

問6　電界と電位差の関係 $V=Ed$ より、KL間とMN間の合計の電位差は $\dfrac{Q(D-d)}{\epsilon_0 A}$ 、LM間は $\dfrac{(Q+q)d}{\epsilon_0 A}$ になる、電池B2の起電力は $V_2=\dfrac{Q(D-d)+(Q+q)d}{\epsilon_0 A}=\dfrac{QD+qd}{\epsilon_0 A}$ である。

[別解] B2の起電力は $V_{KL}+V_{LM}+V_{MN}=\frac{Qx}{\epsilon_0 A}+\frac{(Q+q)d}{\epsilon_0 A}+\frac{Q(D-d-x)}{\epsilon_0 A}=\frac{QD+qd}{\epsilon_0 A}$

問7　問5と同様にして、電気力線はKN間（$Q \rightarrow -Q$）と、LM間（$q' \rightarrow -q'$）にそれぞれ存在する。したがって、KL間には $\frac{Q}{\epsilon_0}$ 本、LM間には $\frac{Q+q'}{\epsilon_0}$ 本になり、それぞれの電界は、KL間が $\frac{Q}{\epsilon_0 A}$ 、LM間が $\frac{Q+q'}{\epsilon_0 A}$ である。 $V=Ed$ より、 $V=\frac{(Q+q')d}{\epsilon_0 A}$ が成立する。よって、金属板Lの電気量は $q'=\frac{\epsilon_0 A V}{d}-Q$ または、 $q'=q-Q$ である。

[別解] それぞれの金属板間がコンデンサーであると考える（金属板L、Mは表と裏を別々の電極と考える）。 $Q=CV$ より、 $Q=\frac{\epsilon_0 A}{x}V_{KL}=\frac{\epsilon_0 A}{D-d-x}V_{MN}$ 、 $q'+Q=\frac{\epsilon_0 A}{d}V$ が成立する。 $q'=\frac{\epsilon_0 A}{d}V-Q$ または、 $q'=q-Q$ である。

問8　電気力線は、KL間には $\frac{Q+\Delta Q}{\epsilon_0}$ 本、LM間には $\frac{Q+\Delta Q+q'+\Delta q'}{\epsilon_0}$ 本になり、それぞれの電界は、KL間が $\frac{Q+\Delta Q}{\epsilon_0 A}$ 、LM間が $\frac{Q+\Delta Q+q'+\Delta q'}{\epsilon_0 A}$ になる。 $V=Ed$ の公式より、 $\frac{(Q+\Delta Q+q'+\Delta q')d}{\epsilon_0 A}$ がLM間の電位差だから $\frac{(Q+\Delta Q+q'+\Delta q')d}{\epsilon_0 A}=\frac{qd}{\epsilon_0 A}$ …① が成立する。また、 $\frac{(Q+\Delta Q)(D-d)}{\epsilon_0 A}$ がKL間、MN間の電位差の和より、KN間の電位差から $\frac{(Q+\Delta Q)(D-d)+(Q+\Delta Q+q'+\Delta q')d}{\epsilon_0 A}=\frac{QD+qd}{\epsilon_0 A}$ が成立する。①を代入して整理すると、 $\frac{(Q+\Delta Q)(D-d)}{\epsilon_0 A}=\frac{QD}{\epsilon_0 A}$ …② が成立する。②を整理して、 $\Delta Q=\frac{Qd}{D-d}$ が得られる。また、①より、 $\Delta q'=q-Q-\Delta Q-q'$ である。ここで $q'=q-Q$ だから、$\Delta q'=-\Delta Q$ になる。よって、 $\Delta q'=-\frac{Qd}{D-d}$ である。