

入試問題研究 第31回 2004年 東京医科歯科大学 ① 力学

図のように水平な床の上に質量 $2M$ の物体Aと質量 $3M$ の物体Bが重ねて置かれ、物体Bは、軽いひもでお皿とつながれている。滑車、お皿の質量は無視できるものとする。重力加速度の大きさは g とする。また、物体Aと物体Bとの静止摩擦係数、動摩擦係数をそれぞれ μ_A 、 μ'_A 、床と物体Bとの静止摩擦係数、動摩擦係数をそれぞれ μ_B 、 μ'_B とする。問3と問5において、必要ならば、物体Aと物体Bとの動摩擦係数 μ'_A として0.15を、床と物体Bとの動摩擦係数 μ'_B の値として0.10を用いよ。

お皿に質量の異なるおもりをそつとのせ、その時々の物体Aと物体Bの運動の様子を調べた。

(ケース1) おもりの質量が M 以下では、物体Aと物体Bはともに静止していた。

(ケース2) おもりの質量が M を越えると、物体Aと物体Bは一体(物体A・B)となって動き出した。

(ケース3) お皿にのせるおもりの質量をさらに増やしていくと、物体A・Bの加速度は増加してゆき、おもりの質量が $2M$ を越えると、物体Aが物体Bに対して、相対的に動き始めた。

問1 床と物体Bとの静止摩擦係数 μ_B の値を求めよ。

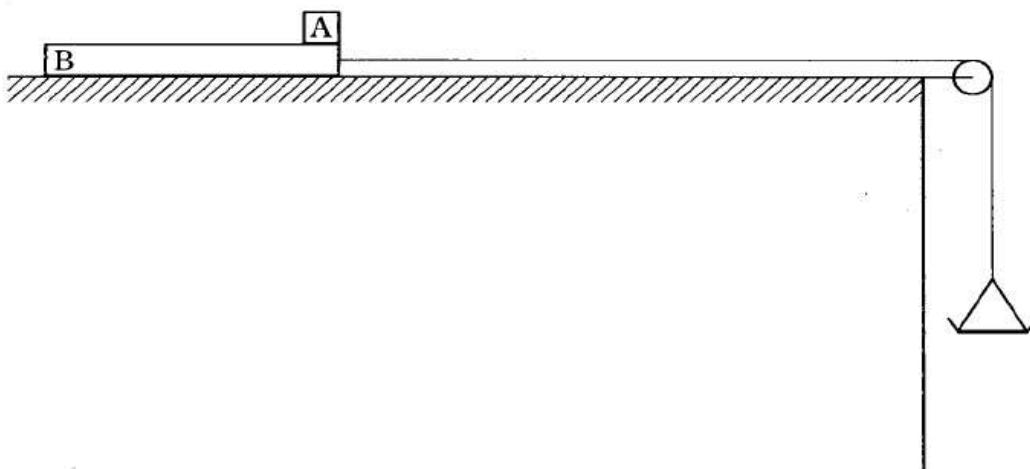
問2 物体Aと物体Bが一体となって動いているとき、物体A、物体Bそれぞれに働いている力を図中に示せ。ただし、ひもの張力を T とする。

問3 (1) 質量が $1.5M$ のおもりをそつとのせ、物体A・Bが水平方向に x だけ動いたとき、重力がおもりにした仕事、および物体A・Bの速さ v を求めよ。

(2) 重力がおもりにした仕事と運動エネルギーの差は何に変化したか。

問4 物体Aと物体Bとの静止摩擦係数 μ_A の値を求めよ。

問5 質量が $3M$ のおもりをそつとのせたとき、物体Aが物体Bからすべり落ちるまでの時間を求めよ。ただし、物体Aと物体Bとの最初の位置は図に示したとおりである。物体Aの長さ l は物体Bの長さ L と比べて無視できるものとする($L \gg l$)。なお、物体Aが物体Bからすべり落ちるまでに、物体Bは滑車にぶつからないものとする。



入試問題研究 第31回 2004年 東京医科歯科大学 ① 力学 (解答・解説)

問1 物体Bが受ける床からの垂直抗力は $5Mg$ である。お皿におもりを M のせたとき一体となつて滑り出すから、最大摩擦力は Mg だから、 $Mg=\mu_B \cdot 5Mg$ より、 $\mu_B=0.20$ である。

問2 物体Aには、重力($2Mg$)が下向きに、Bからの垂直抗力(N_1)が上向きに、静止摩擦力(F_1)が右向きが働く。

物体Bには、重力($3Mg$)が下向きに、Bからの垂直抗力(N_1)が下向きに、静止摩擦力(F_1)が左向きに、床からの垂直抗力(N_2)が下向きに、静止摩擦力(F_2)が左向きに、ひもの張力(T)が右向きに働く。

問3 (1) 一体となつて動くので、A、Bの加速度は同じだ。鉛直方向の力はつりあうので、Aの釣合いより $N_1=2Mg$ 、Bのつりあいより $N_2=N_1+3Mg (=5Mg)$ である。

それぞれの運動方程式を作る。右向きを正として、Aは $F_1=2Ma \cdots ①$ 、Bは $T-\mu_B N_2-F_1=3Ma \cdots ②$ 、おもりは $1.5Mg-T=1.5Ma \cdots ③$ である。以上より、一体となつて運動する加速度は $a=\frac{(3-10\mu_B)g}{13}$ である。 $\mu_B=0.10$ より、 $a=\frac{2g}{13}$ である。

【別解】 一体となつて動くので A、B を質量 $5M$ の物体と考えてよい。それぞれの運動方程式は、ABが $T-\mu_B \cdot 5Mg=5Ma \cdots ①$ 、おもりが $1.5Mg-T=1.5Ma \cdots ②$ で以下同様。

(1) 重力がおもりにした「仕事は力×動いた距離」より $1.5Mgx$ である。

ABの速度は、等加速度運動の公式 $v^2-v_0^2=2ax$ より $v=\sqrt{\frac{4gx}{13}}$ である。

(2) A、B、おもりの運動エネルギー合計は $K=\frac{1}{2}(2M+3M+1.5M)\left(\sqrt{\frac{4gx}{13}}\right)^2$

より、 $K=Mgx$ である。重力がおもりにした仕事が $1.5Mgx$ だから、その差 $0.5Mgx$ は、床との動摩擦力 $0.5Mg$ に逆らって物体を距離 x 動かしたときの仕事に相当する。よって、そのエネルギーは摩擦熱(熱エネルギー)に変化した。

問4 おもりが $2M$ のときが一体となつて動く限界である。このときの運動を詳しく調べてみよう。

それぞれの運動方程式は、Aが $F_1=2Ma \cdots ①$ 、Bが $T-\mu_B(2M+3M)g-F_1=3Ma \cdots ②$ 、おもりが $2Mg-T=2Ma \cdots ③$ である。このときのAB間の摩擦力が最大摩擦力に相当するはずだから $F_1=\mu_A \cdot 2Mg \cdots ④$ になる。 $①+②+③$ より、 $a=\frac{(2-5\mu_B)g}{7}$ だから、 $①$ に代入して $F_1=\frac{2(2-5\mu_B)Mg}{7}$ が得られる。 $④$ を使って $\mu_A=\frac{2-5\mu_B}{7}$ である。

問5 質量が $3M$ のおもりをそつとのせたとき、A、Bはそれぞれが別々の運動を行う。それぞれの運動方程式は、Aが $f_1=2Ma_A \cdots ①$ 、Bが $T-\mu_B(2M+3M)g-f_1=3Ma_B \cdots ②$ 、おもりが $3Mg-T=3Ma_B \cdots ③$ 、AB間の摩擦力は動摩擦力だから $f_1=\mu_A \cdot 2Mg \cdots ④$ が成立し、 $①$ 、 $④$ より $a_A=\mu_A g=0.15g$ 、 $②$ 、 $③$ より $a_B=\frac{(3-5\mu_B-2\mu_A)g}{6}=\frac{2.2g}{6}$ になる。

Bから見たAの加速度は $a=a_A-a_B=-\frac{1.3g}{6}$ 、初速度はゼロより、Bの上を L 滑れば落ちる。等加速度運動の公式より $\frac{1}{2}\left(\frac{1.3g}{6}\right)t^2=L$ だから、その時間は $t=\sqrt{\frac{120L}{13g}}$ である。