入試問題研究　2002年度　東京工業大学　前期③

図1に示すように、電気容量の同じコンデンサー2つと抵抗、スイッチおよび、電圧 V の電池とからなる電気回路がある。コンデンサー1に向かって電流計を流れる電流の向き、(図の矢印の向き)を正の向きとして、次の問いに答えなさい。

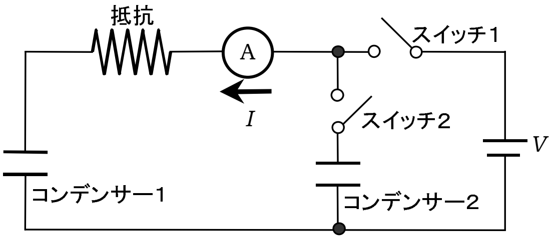

図1

(a) 抵抗の値を R とし、コンデンサーを放電しておく。スイッチ2は開いたままでスイッチ1を閉じた後、電流計に流れる電流 I の時間変化を記録すると、図2のような結果を得た。スイッチ1を閉じた時刻を $t=0$ で I_0 であった電流は、時間とともに減少する。自然対数の底を e として、電流が $\dfrac{I_0}{e}$ に減少した時刻を $t=T$ とすると、図2の影を付けた部分の面積は I_0T となる[1]。このことを使って、コンデンサーの電気容量 C を T と R を用いて表しなさい。

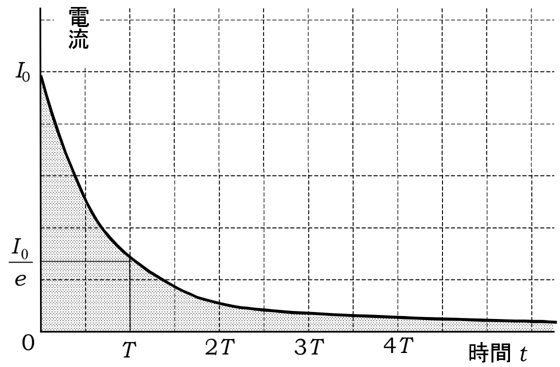

図2

(b) 抵抗の値を $\dfrac{R}{2}$ にして(a)と同じ測定をすると、電流はどのように変化するか。電流の時間変化の特徴を捉えた概略図を描きなさい。

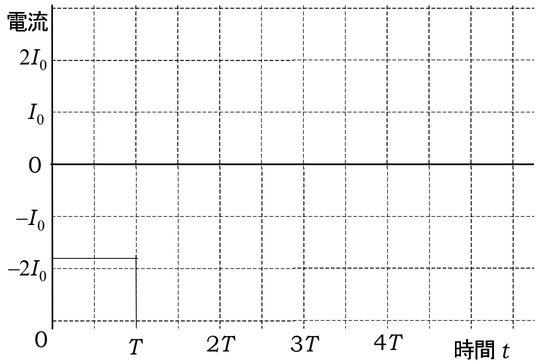

図3

(c) 抵抗の値を R に戻し、(a)の実験でコンデンサー1が充電された後スイッチ1を開き、続いてスイッチ2を閉じた。電流計にはどのような電流が流れるか。スイッチ2を閉じた時刻を $t=0$ とし、電流の時間変化の特徴を捉えた概略図を描きなさい。

(d) (c)でスイッチ2を閉じてから電流変化が無くなるまでに R の抵抗で消費される電気エネルギー W を、C、V を用いて表しなさい。

---

[1] グラフの面積だから、積分して求めれば、このことが確かめられる。ただし、グラフの関数が分かればの話ですが… これを知るには微分方程式が必要になります。→ ぜひ微分方程式を研究してみましょう。

入試問題研究　2002年度　東京工業大学　前期③　解答・解説

(a) 考え方を整理して、説明してみましょう。

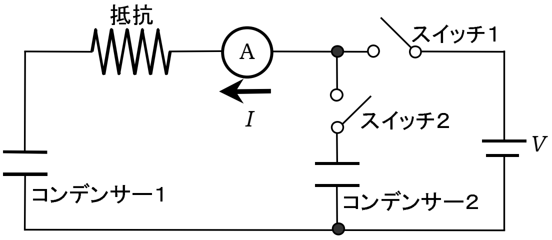

図1

① スイッチを入れた瞬間では、
コンデンサーの電圧はゼロだから
→ **抵抗の電圧 ＝ 電池の起電力（電圧）**
→ **電池の起電力は** $V = I_0 R$

② スイッチを入れて十分時間がたったとき、
抵抗に流れる充電電流はゼロだから
→ **抵抗の電圧降下がゼロ**
→ **コンデンサーの電圧=電池の起電力** → $Q = CV$

③ **スイッチを入れてから流れた電流の合計 ＝ コンデンサーにたまっている電気量** → $Q = I_0 T$

以上から、$I_0 T = C \cdot I_0 R$ が成立する。よって、コンデンサーの電気容量は $C = \dfrac{T}{R}$ と表せる。このように考えると、答えは出るのですが、なかなか大変です。

［別解］（考え方の部） 微積分応用による。t [s] のときの電流を I (t)[A]、コンデンサーの電気量を Q(t) [C]、コンデンサーの電圧を $V_C(t)$ [V] とする。

$t + \varDelta t$ [s] までにコンデンサーに流れ込む電気量は $\varDelta Q = I \cdot \varDelta t$ が成立する。このことから、$\dfrac{\Delta Q}{\Delta t} = I$ の関係式が成立する。$\varDelta t$ のゼロへの極限を取ると、微分方程式 $\dfrac{dQ}{dt} = I$ が得られる。Q と I はともに時間の関数であり、このままでは、この微分方程式は解けない。次に、Q と I の関係を調べてみよう。

コンデンサーの電気量の公式より $Q = CV_C$ が成立するから、コンデンサーの電圧は $V_C = \dfrac{Q}{C}$ である。

また、抵抗にかかる電圧は $V - V_C$ になるから、オームの法則より、$V - V_C = IR$ が成立する。これらを代入整理して、$V - \dfrac{Q}{C} = \dfrac{dQ}{dt} \cdot R$ となる微分方程式が得られる。形を整えると、$\dfrac{dQ}{dt} = -\dfrac{Q}{CR} + \dfrac{V}{R}$ ･･･① である。

この微分方程式① が解ければ、すべて解決ということになる（初期条件は $t = 0$ のとき、$Q = 0$）。

（微分方程式の解法の部） $q = Q - CV$ とおいて微分方程式を変形すると、$\dfrac{dq}{dt} = -\dfrac{1}{CR} \cdot q$ となるので、変数分離して $\dfrac{dq}{q} = -\dfrac{1}{CR} dt$ になる。

慮辺積分して $\displaystyle\int \frac{dq}{q} = -\frac{1}{CR}\int dt$ だから、$\log|q| = -\dfrac{1}{CR} t + C'$ になるから、$q = \pm e^{-\frac{1}{CR}t + C'} = \pm e^{C'} \cdot e^{-\frac{1}{CR}t}$ である。$q = Q - CV$ を使って戻すと、$Q = CV \pm e^{C'} \cdot e^{-\frac{1}{CR}t}$ である。初期条件を代入して積分定数 C’ を決めると、$Q = CV(1 - e^{-\frac{1}{CR}t})$ である。また、電流は $I = \dfrac{dQ}{dt} = \dfrac{V}{R} \cdot e^{-\frac{1}{CR}t}$ である、$t = 0$ のときの電流値が I_0 だから、$I_0 = \dfrac{V}{R}$ である。 よって、求める電流の式は $I = I_0 \cdot e^{-\frac{1}{CR}t}$ ･･･② である。また、$t = T$ のとき、$I = I_0$ だから、$\dfrac{I_0}{e} = I_0 \cdot e^{-\frac{1}{CR}T}$ になる。よって、 $T = CR$ ･･･③ が得られる。

なお、グラフの面積は $S = \displaystyle\int I dt = \int I_0 \cdot e^{-\frac{t}{T}} dt = \left[-I_0 T \cdot e^{-\frac{t}{T}} \right]_0^{\infty} = -I_0 T \cdot e^{-\frac{\infty}{T}} + I_0 T \cdot e^{-\frac{0}{T}} = I_0 T$ となり、「グラフの面積が $I_0 T$ に等しい」とした問題の設定が正しい。 なお、(a) の答えは ③より、$C = \dfrac{T}{R}$ である。（この方法の利点は、単なる計算だけで工夫は要らないことにあります。いわゆる、「算数から数学へ」の変化と同じ）

(b) 抵抗の値を $\dfrac{R}{2}$ にすると、スイッチをいれた瞬間に流れる電流は、電池の起電力が同じだから、$V = I_0 R = I' \cdot \dfrac{R}{2}$ が成立する。よって、$I' = 2I_0$ となり、時刻ゼロのときの電流値は 2 倍になる。

また、同じコンデンサーだから電気容量が変わらないので (a) より $C=\dfrac{T}{R}=\dfrac{T'}{R'}$ と書ける。 抵抗の値を $R'=\dfrac{R}{2}$ にすると、$T'=\dfrac{T}{2}$ になるので、グラフの減衰は２倍になり、右に示すようなグラフで電流が減衰してゆく。

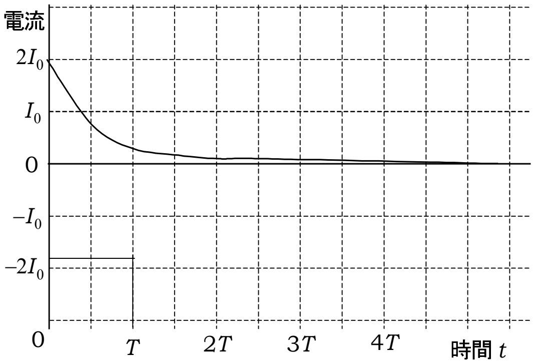

図3

［別解］ 抵抗 R を通してコンデンサーに充電するとき、流れる電流の変化を表す関数は $I=\dfrac{V}{R}\cdot e^{-\frac{1}{CR}t}$ と表される。この場合、抵抗が $\dfrac{R}{2}$ になるのだから、電流を表す関数は $I=\dfrac{2V}{R}\cdot e^{-\frac{2}{CR}t}$ になる。

$I_0=\dfrac{V}{R}$、 $T=CR$ を代入してやればよい。したがって、電流を表す関数は $I=2I_0\cdot e^{-\frac{2}{T}t}$ の関数になることが分かる。

(c) 抵抗の値を R に戻し、(a)の実験でコンデンサー１が充電された後スイッチ１を開き、続いてスイッチ2を閉じた。電流計にはどのような電流が流れるか。スイッチ2を閉じた時刻を $t=0$ とし、電流の時間変化の特徴を捉えた概略図を描きなさい。

このような場合、微分方程式を使わない方法ではどのように考えるのであろうか？

① スイッチを入れた直後では

右のコンデンサーの電圧はゼロ、左のコンデンサーは電圧が $V\ (=I_0R)$ になる。

→ 抵抗の電圧は $V\ (=I_0R)$ になる。

→ オームの法則より、スイッチを入れた直後に抵抗に流れる電流は I_0 である。

② 十分時間がたったとき

→ コンデンサーに流れる（抵抗に流れる）電流がゼロになる。

→ 抵抗の電位差はゼロになる。

→ 両コンデンサーの電圧は等しくなる。

→ 同じ電気容量だから、それぞれのコンデンサーの電気量は等しくなる。

→ 電気量保存の法則より、それぞれのコンデンサーには元の電気量の半分ずつ $\dfrac{Q}{2}$ がたまる。

以上より、$I_0T'=\dfrac{C\cdot I_0R}{2}$ が成立するから、$T'=\dfrac{CR}{2}=\dfrac{T}{2}$ である。よって、初期電流値は同じだが、電流の減衰が2倍速くなる。 ただし、この考えの前提には **「電流の変化が電池で充電するときと同じ様に変化する」** の条件が成立することが求められる。本当にそのような条件がなりたつのだろうか？

［別解］（考え方の部） 微積分応用による。 t [s] のときの右向きの電流を $I(t)$ [A]、コンデンサーの電気量を $Q_R(t)$、$Q_L(t)$ [C]、コンデンサーの電圧を $V_R(t)$、$V_L(t)$ [V] とする。

$t+\varDelta t$ [s] までにコンデンサーに流れ込む電気量は $\varDelta Q=I\cdot\varDelta t$ が成立する。このことから、$\dfrac{\Delta Q}{\Delta t}=I$ の関係式が成立する。$\varDelta t$ のゼロへの極限を取ると、微分方程式 $\dfrac{dQ}{dt}=I$ が得られる。これより、左右のコンデンサーで、右が $\dfrac{dQ_R}{dt}=I$、左が $\dfrac{dQ_L}{dt}=-I$ になる。

コンデンサーの電気量の公式より $Q_R=CV_R$、$Q_L=CV_L$ が成立するから、コンデンサーの電圧は $V_R=\dfrac{Q_R}{C}$、$V_L=\dfrac{Q_L}{C}$ である。

また、抵抗にかかる電圧は V_L-V_R になるから、オームの法則より、$V_L-V_R=IR$ が成立する。また、$Q_R+Q_L=Q$ も成立する。

これらを代入整理して、$\dfrac{Q_L}{C}-\dfrac{Q_R}{C}=\dfrac{dQ_R}{dt}\cdot R$ となり、$Q_R+Q_L=Q$ を使って、$\dfrac{dQ_R}{dt}=-\dfrac{2Q_R}{CR}+\dfrac{Q}{CR}$ の微分方程式が得られる。

なお、この微分方程式の初期条件は $t=0$ のとき、$Q_R=0$ である。

（微分方程式の解法の部） $q=Q_R-\dfrac{Q}{2}$ とおいて微分方程式を変形すると、$\dfrac{dq}{dt}=-\dfrac{2}{CR}\cdot q$ となるので、変数分離して $\dfrac{dq}{q}=-\dfrac{2}{CR}dt$ になる。両辺積分して $\int\dfrac{dq}{q}=-\dfrac{2}{CR}\int dt$ だから、$\log|q|=-\dfrac{2}{CR}t+C'$ になるから、$q=\pm e^{-\frac{2}{CR}t+C'}=\pm e^{C'}\cdot e^{-\frac{2}{CR}t}$ である。$q=Q_R-\dfrac{Q}{2}$ を使って戻すと、$Q_R=\dfrac{Q}{2}\pm e^{C'}\cdot e^{-\frac{2}{CR}t}$ である。初期条件を代入して積分定数 C’ を決めると、$Q=\dfrac{Q}{2}(1-e^{-\frac{2}{CR}t})$ である。また、電流は $I=\dfrac{dQ}{dt}=\dfrac{Q}{CR}\cdot e^{-\frac{2}{CR}t}=I_0\cdot e^{-\frac{2}{CR}t}$ であるから、求める電流の式は $I=I_0\cdot e^{-\frac{2}{CR}t}$ ･･･② である。よって、 $T'=\dfrac{CR}{2}=\dfrac{T}{2}$ ･･･③ が得られる。 この方法の利点は、前問とまったく同じことをしているだけの「単なる計算だけ」で考え方の工夫は要らないことにあります。）

(d) (c)でスイッチ2を閉じてから電流変化が無くなるまでに R の抵抗で消費される電気エネルギー W を、 C 、 V を用いて表しなさい。

これは簡単だ。エネルギー保存の法則より、コンデンサーにたくわえられているエネルギーの減少分が抵抗で消費されるエネルギー（ジュール熱）になることにすぐ気付くはず。

始めに持っていたエネルギーは左のコンデンサーだけに $U_0=\dfrac{1}{2}\dfrac{Q^2}{C}=\dfrac{I_0{}^2T^2}{2C}$ だったが、最後は両方に半分ずつ電荷がたまった状態となるから、$U=\dfrac{1}{2}\dfrac{(Q/2)^2}{C}+\dfrac{1}{2}\dfrac{(Q/2)^2}{C}=\dfrac{I_0{}^2T^2}{4C}=\dfrac{U_0}{2}$ になる。よって、失われた電気エネルギーが熱になるから、抵抗で発生する熱量は $\dfrac{I_0{}^2T^2}{4C}$ である。これも微積分法でとけるのか？当然計算だけの問題ですが…

［別解］（考え方の部） 抵抗での消費電力は $P=I^2R$ だから、抵抗で消費する電力量は $W=\int I^2R\,dt$ を計算すればよいだけだ。

$$W=\int I_0{}^2\cdot\left(e^{-\frac{2}{CR}t}\right)^2R\,dt=I_0{}^2R\cdot\int e^{-\frac{4}{CR}t}\,dt=\left|-I_0{}^2R\cdot\frac{CR}{4}e^{-\frac{4}{CR}t}\right|_0^{\infty}=I_0{}^2R\cdot\frac{CR}{4}$$

になる。$C=\dfrac{T}{R}$ を使って R を消去すると、

抵抗でのジュール熱の発生量は $W=\dfrac{I_0{}^2T^2}{4C}$ になることも分かる。