入試問題研究　第33回　2004年　東京大学　後期　③　波動（反射、屈折の法則）

「光が空間の点Aから点Bまで進むとき、光は2点を結ぶすべての経路のうち到達時間が最小となる経路を選ぶ。」これをフェルマーの原理という。この原理を用いて以下の設問に答えよ。

Ⅰ　図3の点Aから出た光が平面鏡MM'で反射して点Bに到達するとき、到達するまでの時間が最小になるのはどのような経路か。理由とともに述べよ。

Ⅱ　図4で、空気中の点Aを出発した光が角度 θ でガラスに入射すると、一般にその経路は折れ曲がる（光の屈折）。点Aからガラス中の点Bに到達する光は、図4の経路ACBを進む。空気の屈折率を1、ガラスの屈折率を n として、入射角 θ と屈折角 ϕ との間にはスネルの法則 $\sin\theta = n\sin\phi$ が成り立つ。スネルの法則に従う経路は光が点Aから点Bに到達する最小時間の経路に一致することを、以下の手順で示せ。

(1)　図4のようにCを原点とする座標軸をとり、点Aの座標を (a_1, a_2) 、点Bの座標を (b_1, b_2) とする。光が経路ACBを進むのに要する時間 t_0 を求めよ。空気中で光の速さを c とするとき、ガラス中での光の速さは c/n となる。

(2)　光がガラスに到達する地点が原点Cから左右どちらにずれても、ずれた経路を進むのに要する時間 t は t_0 よりも長くなる。すなわち、 t は原点Cを通るときに最小値をとる。したがって、光が原点Cから微小距離（線分ACや線分CBの長さに比べて十分短い距離）だけずれた点C'（座標 $(x, 0)$ ）を通る経路を進むのに要する時間 t は t_0 にほぼ等しい。このことを用いてスネルの法則を導け。ただし、 x^2 を含む項は小さいとして無視してよい。また、 δ の絶対値が1に比べて十分小さいとき、 $\sqrt{1+\delta} \approx 1 + \frac{1}{2}\delta$ と近似できる。

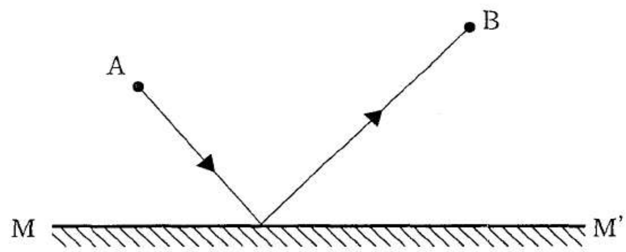

図3

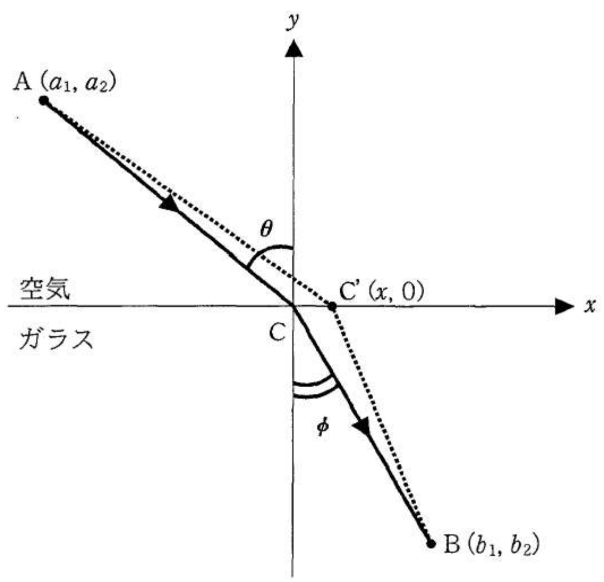

図4

入試問題研究　第 33 回 2004 年 東京大学　後期 ③ 波動（反射、屈折の法則）　解答・解説

I　点 A の線 MN に対する対称な点 A' をとる。次に、点 A' と点 B を結ぶ直線と線 MN との交点を点 P ととる。

線 MN 上の点 P 以外の点 Q をとるとき、幾何学の定理「三角形の2辺の和は他の1辺より長い」が成立するので、コース APB と、コース AQB の距離との間の大小関係は APB<AQB が成立する。フェルマーの定理が成立するから距離が短いコースが最短時間で到達できるコースだから、反射光はこのコースをとる。

対頂角は等しいので ∠A' PM = ∠BPN が成立する。また、点 A と点 A' は線 MN に対して対称だから ∠A' PM = ∠APM が成立する。よって、∠APM = ∠BPN・・・① が成立する。

次に、入射角と反射角を考える。点 P に線 MN に対して垂線を引く。上側の点を点 C、下側の点を点 D とする。

入射角 ∠APC は ∠APC = ∠R −∠APM、反射角 ∠BPC は ∠BPC = ∠R −∠BPN であるから、①より、∠APC = ∠BPC が成立するので、入射角と反射角は等しくなる。

II　光が ACB と経由して進む場合の時間は $t_0=\dfrac{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}{c}+\dfrac{n\sqrt{b_1^2+b_2^2}}{c}$ ・・・①　である。一方、光が原点 C から微小距離（線分 AC や線分 CB の長さに比べて十分短い距離）x だけずれた点 C'（座標 $(x,0)$ ）のとき、線分 AC' $=\sqrt{(a_1-x)^2+a_2^2}$、線分 BC' $=\sqrt{(b_1-x)^2+b_2^2}$ より、近似式 $\sqrt{1+\delta}\approx 1+\dfrac{1}{2}\delta$ から、線分 AC'は $\sqrt{(a_1-x)^2+a_2^2}\approx\sqrt{a_1^2+a_2^2}\left(1+\dfrac{a_1}{a_1^2+a_2^2}x\right)$ ・・・②、線分 BC' は $\sqrt{(b_1-x)^2+b_2^2}\approx\sqrt{b_1^2+b_2^2}\left(1+\dfrac{b_1}{b_1^2+b_2^2}x\right)$ ・・・③ が成立する。

経路 AC'B を通る時間は $t=\dfrac{\sqrt{(a_1-x)^2+a_2^2}}{c}+\dfrac{n\sqrt{(b_1-x)^2+b_2^2}}{c}$ だから、線分 AC' および線分 BC' の近似式②、③より、時間は $t\approx\dfrac{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}{c}\left(1+\dfrac{a_1}{a_1^2+a_2^2}x\right)+\dfrac{n\sqrt{b_1^2+b_2^2}}{c}\left(1+\dfrac{b_1}{b_1^2+b_2^2}x\right)$ ・・・④ と近似できる。よって、時間差は $t-t_0\approx\dfrac{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}{c}\left(\dfrac{a_1}{a_1^2+a_2^2}x\right)+\dfrac{n\sqrt{b_1^2+b_2^2}}{c}\left(\dfrac{b_1}{b_1^2+b_2^2}x\right)$ ・・・⑤ と表せる。フェルマーの定理の説明より、時間差⑤がゼロになるから、$\dfrac{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}{c}\left(\dfrac{a_1}{a_1^2+a_2^2}x\right)+\dfrac{n\sqrt{b_1^2+b_2^2}}{c}\left(\dfrac{b_1}{b_1^2+b_2^2}x\right)=0$ が成立する。よって、$\dfrac{-a_1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}=\dfrac{n\,b_1}{\sqrt{b_1^2+b_2^2}}$ が成立する。これは、$\sin\theta=n\sin\phi$ のことになる。

これを変形して、スネルの法則 $n=\dfrac{\sin\theta}{\sin\phi}$ が導ける。