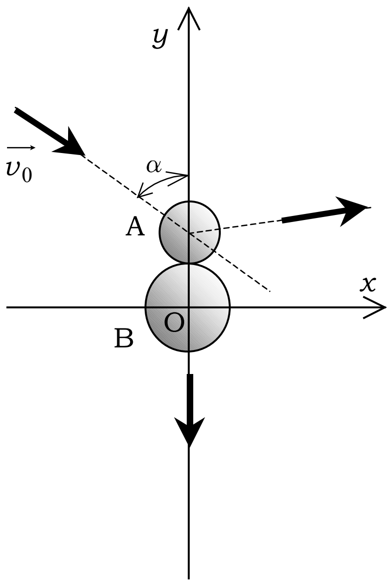
入試問題研究　第35回　　2001年　東京都立大学　①　衝突

右図に示すように、質量mの球Aがy軸に対して角度αをなす方向から速度$\overrightarrow{v_0}$で飛来し、座標の原点に静止している質量$2m$の球Bにy軸上で衝突した。球Aと球Bの反発係数をeとし、衝突時における球の変形や摩擦、および、重力は無視する。α、e、mおよび、$\overrightarrow{v_0}$の大きさv_0を用いて、以下の問に答えなさい。



(1) 衝突前の速度ベクトル$\overrightarrow{v_0}$をx方向成分とy方向成分に分解したとき、各速度成分の大きさv_x、v_yを求めなさい。

(2) 衝突後の球Aと球Bの各運動量ベクトルを合成したベクトル$\vec{p}$の大きさp、および、この合成ベクトルのx、y成分の大きさを求めなさい。

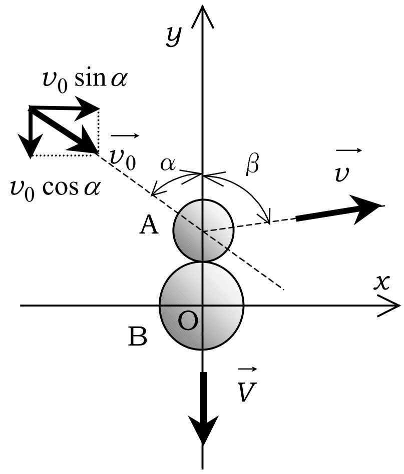
(3) 衝突後の球Aが球Bに与えた力積の大きさを求めなさい。

(4) 衝突後の球Aの運動方向は、反発係数eの値により異なる。球Aが衝突後x軸に平行な方向に運動するときのeの値を求めなさい。

(5) 衝突が$e=1$の完全弾性衝突であった場合、衝突後の球Aと球Bの各運動エネルギーをE_A、E_Bを求めなさい。

入試問題研究　第35回　2001年 東京都立大学①　（衝突）　　（解答・解説）

右図に示すように、質量mの球Aがy軸に対して角度αをなす方向から速度$\overrightarrow{v_0}$で飛来し、座標の原点に静止している質量$2m$の球Bにy軸上で衝突した。球Aと球Bの反発係数をeとし、衝突時における球の変形や摩擦、および、重力は無視する。α、e、mおよび、$\overrightarrow{v_0}$の大きさv_0を用いて、以下の問に答えなさい。



(1) 衝突前の速度を分解して（右図）各方向の速度成分を求める。
　x方向成分は $v_x = v_0 \sin\alpha$
　y方向成分は $v_y = -v_0 \cos\alpha$

(2) 衝突時に外力が働かない。よって、衝突前後で運動量が保存する（運動量保存の法則）から、衝突後の運動量の和（合成した運動量のベクトル$\vec{p}$）は衝突前の運動量の和に等しい。$\vec{p} = \overrightarrow{v_0} + \vec{0} = \overrightarrow{v_0}$ が成立するから、x 方向成分は $p_x = mv_x = mv_0 \sin\alpha$、$y$ 方向成分は $\vec{p}_y = mv_y = -mv_0 \cos\alpha$ である。

(3) 衝突時に働く力は y 軸方向のみだから、球 A、B が受ける力積は y 軸方向成分のみである。 そのときの力積の大きさを$F\Delta t$、衝突後の速度が、球Aが $\vec{v} = (v\sin\beta,\ v\sin\beta)$、球Bが $\vec{V} = (0,\ -V)$ とする。

運動量の変化が力積に等しいので、球 A において、x 方向: $mv\sin\beta - mv_0 \sin\alpha = 0$ …①、y 方向: $mv\cos\beta - (-mv_0\cos\alpha) = F\Delta t$ …②、球Bにおいて、$(-2mV) - 0 = -F\Delta t$ …③ の関係式が成立する。

$\boxed{\text{参考}}$ ①より $mv\sin\beta = mv_0 \sin\alpha$（これは$x$方向の運動量保存則）より、$v\sin\beta = v_0\sin\alpha$ …④、また、②、③式より$F\Delta t$を消去した$mv\cos\beta - 2mV = -mv_0\cos\alpha$（これは$y$方向の運動量保存則）より、$v\cos\beta - 2V = -v_0\cos\alpha$ …⑤が成立する。

反発係数の公式より、$e = -\dfrac{(+v\cos\beta) - (-V)}{(-v_0\cos\alpha) - 0}$ より、$v\cos\beta + V = ev_0\cos\alpha$ …⑥ も成立。⑤、⑥より、Vを消去して、$3v\cos\beta = (2e-1)v_0\cos\alpha$ だから、②に代入すると $F\Delta t = m\cdot\dfrac{(2e-1)v_0\cos\alpha}{3} + mv_0\cos\alpha$ である。よって、力積の大きさは $F\Delta t = \dfrac{2(e+1)mv_0\cos\alpha}{3}$ である。

(4) 衝突後の球Aの運動方向がx軸に平行な方向（$\beta = 90^\circ$）に運動するから、④は$v = v_0\sin\alpha$ …④'、⑤より $2V = v_0\cos\alpha$ …⑤'、⑥より $V = ev_0\cos\alpha$ …⑥' が成立する。⑤'、⑥'より、反発係数は $e = \dfrac{1}{2}$ である。

(5) 衝突が $e=1$ の完全弾性衝突であった場合では、⑥より、$v\cos\beta + V = v_0\cos\alpha$ …⑥'' になり、$v\sin\beta = v_0\sin\alpha$ …④、$v\cos\beta - 2V = -v_0\cos\alpha$ …⑤ と合わせて成立する。⑤と⑥'' から、$v\cos\beta = \dfrac{1}{3}v_0\cos\alpha$ …⑦、$V = \dfrac{2}{3}v_0\cos\alpha$ …⑧ である。運動エネルギーは球 A が$E_A = \dfrac{1}{2}mv^2$、球 B が $E_B = \dfrac{1}{2}\cdot 2m\cdot V^2 = mV^2$ になる。④、⑦、⑧を代入すると、球 A は $E_A = \dfrac{1}{2}m\left\{(v\sin\beta)^2 + (v\sin\beta)^2\right\}$ だから、$E_A = \dfrac{1}{2}mv_0{}^2\left(\sin^2\alpha + \dfrac{1}{9}\cos^2\alpha\right) = \dfrac{1}{2}mv_0{}^2\left(1 - \dfrac{8}{9}\cos^2\alpha\right) = \dfrac{1}{2}mv_0{}^2 - \dfrac{4}{9}mv_0{}^2\cos^2\alpha$ である。また、球Bの運動エネルギーは $E_B = m\cdot V^2 = m\cdot\left(\dfrac{2}{3}v_0\cos\alpha\right)^2 = \dfrac{4}{9}mv_0{}^2\cos^2\alpha$ である。

$\boxed{\text{参考}}$ 衝突前の運動エネルギーの和は $\dfrac{1}{2}mv_0{}^2$ であり、衝突後の運動エネルギーの和は $E_A + E_B$ だから、上の結果を代入してやると、$E_A + E_B = \left(\dfrac{1}{2}mv_0{}^2 - \dfrac{4}{9}mv_0{}^2\cos^2\alpha\right) + \left(\dfrac{4}{9}mv_0{}^2\cos^2\alpha\right) = \dfrac{1}{2}mv_0{}^2$ となり、衝突前後で運動エネルギーの和は変化していない（**弾性衝突では、エネルギー保存の法則が成立する！**）