

大学入試問題研究 第36回 1996年 神戸大学 ③ 弦を伝わる波の速度の公式を導く

次の文章を読んで、問1～4に答えなさい。

線密度(単位長さあたりの質量) ρ [kg]の物質で出来た弦を伝わる横波を考える。弦の張力を T [N]とし、弦に対する重力の影響は無視する。以下のように答えて、弦を伝わる横波の速さ v [m/s]が、 $\sqrt{T/\rho}$ となることを示そう。

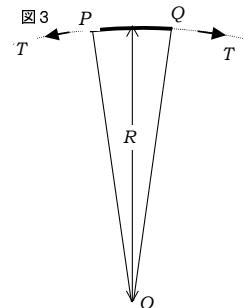
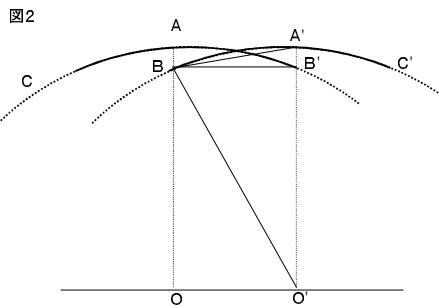
図1は右方向に速さ v [m/s]で進む横波があるときの時刻 $t = 0$ における弦の変位を示したものである。変位が最大となる点(以下最大変位点と呼ぶ)をAとし、その近傍の弦の形状は、中心がO、半径が R [m]の円弧Cと近似できるものとする。

図2は、点A近傍で横波が進む様子を模式的に描いたものである。短い時間 t [s]後に弦上の点Aが大きさ a [m/s²] の加速度で点Bまで等加速度運動したとすると、その移動量 y [m](=AB)は [ア] となる。一方、時間 t [s]後における最大変位点A'近傍の弦の形状は O'を中心とする半径 R [m]の円弧C'となり、点Bは円弧C'の上にあることになる。図2中に示してあるように、A'O' 上に点B'を AB=A'B' となるようにとり、 $\angle BO'B'=2\phi$ とすると、

$$\frac{BB'}{O'B} = \frac{[イ]}{R} = \sin(2\phi) \cong 2\phi, \text{ および, } \frac{A'B'}{BB'} = \frac{y}{BB'} = \tan(\phi) \cong \phi \text{ が成立するから, } y = [ウ] \text{ となり, [ア]}$$

と比較して点Aの加速度の大きさが $a = [エ]$ と求められる。

次に、A点を中心とした微小な長さ s [m]の部分 PQ を弦上に考える(図3)。この微小部分の質量を m [kg]、AO方向の加速度を a [m/s²]、微小部分にかかる AO方向の力を F [N]とすると、運動方程式は、[カ]で、AO方向の加速度 a は [エ] で与えられる。さらに、微小部分にかかる AO方向の力 F を θ と弦の張力 T を用いて表すと [キ] となる。 θ は十分小さいので、 $\sin \theta \cong \theta = s/(2R)$ なる近似を行うと、 $F = [ク]$ となる。これらを運動方程式 [オ] = F に代入することによって、 $v = \sqrt{T/\rho}$ が得られる。



問1 上の文中の空欄 [ア] ~ [ク] を適当な数式で埋めなさい。

問2 上で求めた横波の速度 v は、 $v = T^\alpha \rho^\beta$ とおいて、両辺の次元が一致するように α 、 β を定めたのものに等しいことを示しなさい。

問3 上の弦を間隔 L [m]の固定端XおよびYの間に張り、振動を与えたところ、 n 個の腹を持つ定常波が観測された。この振動の振動数 f [Hz]を間隔 L 、張力 T 、線密度 ρ 、腹の数 n を用いて示しなさい。また、定常波が出来る理由を簡潔に説明しなさい。

問4 ギターなどの弦楽器では、低音弦に太い巻線を用いている。その理由を上で求めた横波の速度 v の式に基づいて説明しなさい。

大学入試問題研究 第36回 1996年 神戸大学 ③ 弦を伝わる波の速度の公式を導く

基本となる知識 運動方程式、弦の振動、音程と振動数

復習事項 音の3要素、次元解析

解説 弦を伝わる波の速さの公式を導く問題である。このような方法で導けるのだということを知ってほしい。

問1 波の山の位置(最大変位の位置)での振動速度はゼロだ。そのときの加速度を a とし、短い時間 t の間の移動距離だから、等加速度運動とみなせるので、縦方向の移動距離(=AB)は $y = \frac{1}{2}at^2 \cdots \boxed{\text{ア}}$ だ。また、図2における BB' は時間 t の間に波が右に進んだ距離だから、 $BB' = vt \cdots \boxed{\text{イ}}$ である。したがって、 $\frac{BB'}{O'B} = \frac{vt}{R} = \sin(2\phi) \cong 2\phi \cdots \boxed{\text{①}}$ 、および、 $\frac{A'B'}{BB'} = \frac{y}{vt} = \tan(\phi) \cong \phi \cdots \boxed{\text{②}}$ が成立する。 $\boxed{\text{②}} \div \boxed{\text{①}}$ より、 $\frac{yR}{(vt)^2} = \frac{1}{2}$ だから、 $y = \frac{(vt)^2}{2R} \cdots \boxed{\text{ウ}}$ だ。 $\boxed{\text{ア}}$ との比較より、最大変位では、縦方向に振動する加速度の大きさが $a = \frac{v^2}{R} \cdots \boxed{\text{エ}}$ になる。長さ s の微小部分の運動方程式 $ma = F \cdots \boxed{\text{オ}}$ を考える。その微小部分の質量は $m = \rho s [kg] \cdots \boxed{\text{カ}}$ になり、両端を張力 $T [N]$ で引かれているので、図3より、微小部分にかかる縦方向成分の力は $F = 2T \sin \theta \cdots \boxed{\text{キ}}$ である。 s が微小なので $\sin \theta = \theta$ と近似できるので、 $F = 2T \sin \theta = 2T\theta$ になる。一方、弦の微小部分が円弧のに当るので、 $\frac{s}{R} = 2\theta$ である。したがって、張力 $F = 2T\theta = \frac{sT}{R} \cdots \boxed{\text{ク}}$ になる。これらを運動方程式に代入して、 $\rho s \times \frac{v^2}{R} = \frac{sT}{R}$ より、弦の上を進む波の速度は $v = \sqrt{\frac{T}{\rho}} \cdots \boxed{\text{ル}}$ になり、弦の上を伝わる波の速度の公式が導かれた。

問2 長さの次元を [L]、質量の次元を [M]、時間の次元を [T]とする。速度の次元は $v \Rightarrow [L \cdot T^{-1}]$ (長さを時間で割ったもの)、張力の次元は $T \Rightarrow [M \cdot L \cdot T^{-2}]$ (力=質量×加速度より)、線密度の次元は $\rho \Rightarrow [M \cdot L^{-1}]$ (長さあたりの質量だから) になる。それらを $v = T^\alpha \cdot \rho^\beta$ に代入すると、 $[L \cdot T^{-1}] = [M \cdot L \cdot T^{-2}]^\alpha \times [M \cdot L^{-1}]^\beta$ だから、 $[L \cdot T^{-1}] = [M^{\alpha+\beta} \cdot L^{\alpha-\beta} \cdot T^{-2\alpha}]$ になる。両辺の次元が一致するので、 $\alpha + \beta = 0$ 、 $\alpha - \beta = 1$ 、 $-1 = -2\alpha$ だから、 $\alpha = \frac{1}{2}$ 、 $\beta = -\frac{1}{2}$ になるので、 $v = T^{\frac{1}{2}} \cdot \rho^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$ である。

問3 両端が固定端だから、弦を伝わる波は固定端反射する。したがって、反対方向に進む同じ波が重なることになる。この二つの波が重ねあわせの原理による波の干渉で、両端が節(固定端だから)で、節が等間隔に並ぶ定常波が出来る。

両端が節になり、節が等間隔に並ぶ。また、節々の間隔は半波長に等しい。したがって、 $\frac{L}{n} = \frac{\lambda}{2}$ が成立する。

これより、波長は $\lambda = \frac{2L}{n}$ になる。また、 $f\lambda = v$ の公式に波の速度 $v = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$ とともに代入して、 $f \times \frac{2L}{n} = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$

だから、弦に起きる波の振動すは $f = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{T}{\rho}} [\text{Hz}]$ である。

問4 音程(振動数)を決める式は $f = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{T}{\rho}}$ だから、振動数を変化させる要素は、腹の数 n 、弦の長さ L 、弦の張力 T 、弦の線密度 ρ である。ギターなどの場合では、基本振動($n=1$)で音程が決まるので、 n を変えることはできない。また、どの弦も同じ長さの楽器があるので、 L を変えることも出来ない。したがって、音程(振動数)を変える手段は、弦の張力 T 、弦の線密度 ρ を変えるしかない。張力 T は演奏の感触から大きく変えることは難しい(ゆるく張った弦ときつく張った弦が混在すると演奏しにくくなる)ので、弦の線密度 ρ を変えて音程を変える。すなわち、同じ材料(鉄)で作られた弦だから、太くすると線密度が大きくなり、振動数が小さくなる(低い音が出る)ことになる。なお、巻線を使うのは太い単線より曲がりやすいので弦を張りやすいためだ。