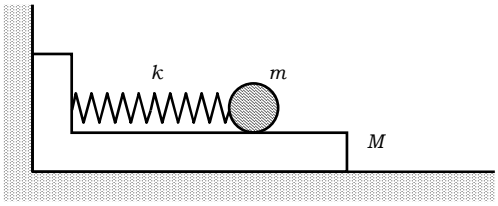
入試問題研究　第 38 回　2002 年　阪大実践（駿台）　①　力学



図のように、水平面上にＬ字形をした質量 M の台を置き、壁に接触させる。台の上には、ばね定数 k の軽いばねと質量 m の球からなるばね振り子が取り付けられている。球と台の間の摩擦は無視できる。重力加速度を g とし、以下の問題に答えなさい。

Ⅰ　はじめに、台と水平面の間に摩擦が無い場合を考える。台を壁に接触させたまま、ばねを l_0 だけ押し縮めて球を静かに放したところ、ばねの長さが自然長になったときに球の速さは v_0 となり、台は壁から離れて動き出した。

問1.　球を放してから台が動き出すまでの時間を求めなさい。

問2.　v_0 を m、k、l_0 を用いて表しなさい。

問3.　台が壁から離れて、ばねの伸びが x になったときの台に対する球の相対加速度を求めなさい。ただし、右向きの加速度を正とする。

問4.　台が動き出してから初めてばねの伸びが最大になるまでの時間を求めなさい。

問5.　ばねの伸びが最大になったときの水平面に対する台の速さを求めなさい。答えに v_0 を用いても良い。

問6.　ばねの伸びの最大値を求めなさい。答えに v_0 を用いても良い。

最を最初の状態に戻し、再びばねを l_0 だけ押し縮める。球を放すと同時に、台に水平方向の外力を加えれば、ばねの縮を l_0 に保ったまま、台が水平面上を等加速度で動くようにすることが出来る。

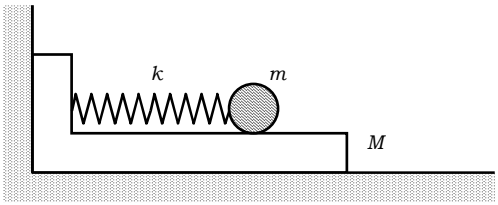
問7.　台に加えるべき外力の大きさを求めなさい。

Ⅱ　次に、台と水平面の間に摩擦がある場合を考える。台を壁に接触させ、ばねを l_0 だけ押し縮めて球を静かに放したところ、ばねの伸びが l_1 になったときに、台は壁から離れて動き出した。台は右向きの速度のまま、距離 L だけ滑って静止した。その後、球は静止している台の上を振幅 l_2 の単振動をするようになった。

問8.　台と水平面の間の摩擦係数を求めなさい。

問9.　台と水平面の間の動摩擦係数を求めなさい。

入試問題研究　第38回　2002年　阪大実践（駿台）　①　力学　解答・解説



問1.　このばねのばね振り子の周期は $T=2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ である。ばねが自然長になるまでだから、4分の1周期に相当するから、球を放してから台が動き出すまでの時間は $\dfrac{\pi}{2}\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ 後になる。

問2.　力学的エネルギー保存の法則より、$\dfrac{1}{2}kl_0{}^2=\dfrac{1}{2}mv_0{}^2$ だから、そのときの速度は $v_0=l_0\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ である。

問3.　床から見た運動を考える。球の運動方程式は $ma=-kx$、台の運動方程式は $MA=kx$ であるので、$a=-\dfrac{kx}{m}$、$A=\dfrac{kx}{M}$ である。台から見た球の加速度は $a-A=-\dfrac{kx}{m}-\dfrac{kx}{M}=-\dfrac{(M+m)kx}{mM}$ である。

問4.　台から見た運動を考える。球の加速度は $a'=-\dfrac{(M+m)kx}{mM}$ だから、単振動の公式 $a=-\omega^2x$ と比較して、角振動数は $\omega=\sqrt{\dfrac{(M+m)k}{mM}}$ だから、この単振動の周期は $T=\dfrac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\dfrac{mM}{(M+m)k}}$ になる。
台が動き出すのが自然長のとき（この単振動の中心位置）だから、ばねの伸びが最大になるまでは4分の1周期だから、その時間は $\dfrac{T}{4}=\dfrac{\pi}{2}\sqrt{\dfrac{mM}{(M+m)k}}$ である。

問5.　ばねの伸びが最大のとき、球と台の速度は同じだ。ばねの伸びが自然長のときと最大のときで運動量保存の法則を適用して、$m\cdot v_0+M\cdot 0=m\cdot v+M\cdot v$ より、そのときの速度は $v=\dfrac{mv_0}{M+m}$ である。

問6.　力学的エネルギー保存の法則より、$\dfrac{1}{2}mv_0{}^2=\dfrac{1}{2}m\left(\dfrac{mv_0}{M+m}\right)^2+\dfrac{1}{2}M\left(\dfrac{mv_0}{M+m}\right)^2+\dfrac{1}{2}kX^2$ だから、
ばねの伸びの最大値は $X=\sqrt{\dfrac{mMv_0{}^2}{(M+m)k}}$ である。

問7.　球、台が等加速度で動くのだから、運動方程式から、球が $ma''=kl_0$、台が $Ma''=F-kl_0$ が成立する。これより、球と台の加速度は $a''=\dfrac{kl_0}{m}$、台に加える力は $F=\dfrac{Mkl_0}{m}+kl_0=\dfrac{(M+m)kl_0}{m}$ である。

Ⅱ　次に、大都水平面の間に摩擦がある場合を考える。台を壁に接触させ、ばねを l_0 だけ押し縮めて球を静かに放したところ、ばねの伸びが l_1 になったときに、台は壁から離れて動き出した。台は右向きの速度のまま、距離 L だけ滑って静止した。その後、球は静止している台の上を振幅 l_2 の単振動をするようになった。

問8.　台と水平面の間の摩擦係数を求めなさい。
台が動き始めるときは台を引くばねの力がそのときの床との最大摩擦力に相当する。したがって、$kl_1=\mu(M+m)g$ だから、床との静止摩擦係数は $\mu=\dfrac{kl_1}{(M+m)g}$ である。

問9.　台と水平面の間の動摩擦係数を求めなさい。
台が動き出したときの力学的エネルギーは $\dfrac{1}{2}kl_0{}^2$、台が停止後の力学的エネルギーは $\dfrac{1}{2}kl_2{}^2$ より、力学的エネルギーの減少が摩擦に逆ってした仕事に相当するので、$\dfrac{1}{2}kl_0{}^2-\dfrac{1}{2}kl_2{}^2=\mu'(M+m)gL$ が成立する。よって、動摩擦係数は $\mu'=\dfrac{k\left(l_0{}^2-l_2{}^2\right)}{2(M+m)gL}$ である。