入試問題研究　第42回　平成13年　第1回　東大入試実戦模試（駿台予備校）　波動

第3問　はじめ xy 平面の原点Oに波源をおいた。波源の振動は、時刻 t における変位 Z が

$$Z = A\sin 2\pi ft \quad (A \text{ は振幅})$$

で表される振動数 f の単振動であるとする。この振動は球面波（波面が球面をなす波）となって、媒質中を速さ V で伝わっていく。原点Oに置いた波源を時刻 $t = 0$ から x 軸の正の方向に一定の速さ v（ただし、$v < V$）で移動させた。波源から時刻 $t = 0$ 以降（$t > 0$）に出た波を、y 軸上の定点 P(0, L)（$L > 0$）で観測する場合について以下の設問に答えよ。

Ⅰ　時刻 t（$t > 0$）に x 軸上の点 S(vt , 0)を通過する波源から出た波が、時刻 t' に点Pに届いた。

(1) t' を t の関数として表せ。

(2) 点Pでの波の変位 Z が0となる時刻を求めよ。

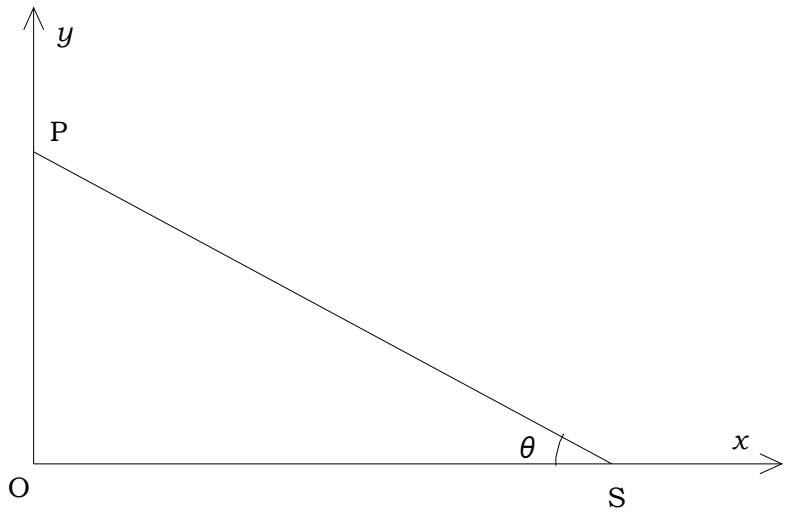
Ⅱ　図3のように、線分SPが x 軸の負の方向となす角をθとする。時刻 t と $t + \Delta t$ に波源を出た波が、それぞれ時刻 t' と $t' + \Delta t$ に点Pに届いた。

(1) $\Delta t'$ を Δt とθを用いて表せ。ただし、Δt、$\Delta t'$ は微小時間であり、時刻 $t + \Delta t$ における波源から点Pまでの距離 $SP + v\Delta t\cos\theta$ と近似してよい。

(2) 点Pで観測される波の振動数 f' をθの関数として求めよ。

(3) 十分な時間が経つ間の、振動数 f' と時刻の関係をグラフ（概形）で示せ。

Ⅲ　点Pで観測される波の振動数 f' が常に一定になるように、波源の振動数 f を時刻 t とともに変えたい。時刻 $t = 0$ に $f = f_0$ のとき、f を t の関数として求めよ。



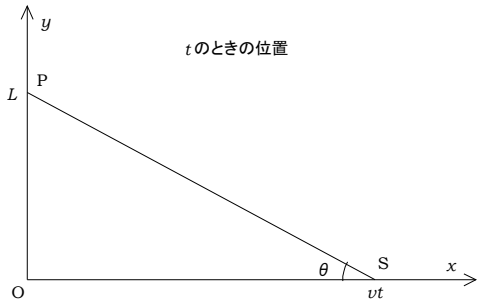
入試問題研究　第42回　平成13年　第1回　東大入試実戦模試（駿台予備校）波動

第3問　（斜め方向に移動する音源のドップラー効果）

Ⅰ.

(1) 時刻tのときの音源の位置から音がPに到達するのだから、その距離は $\sqrt{L^2+v^2t^2}$ である。したがって、音が伝わる時刻は $\sqrt{L^2+v^2t^2}=V(t'-t)$ より、

$t'=t+\dfrac{\sqrt{L^2+v^2t^2}}{V}$ …① である。



(2) 波の変位がゼロになるのは、S点で変位がゼロの波が伝わるのだから、波源でゼロの変位になる時刻は $t=\dfrac{n}{2f}$ （nは正数）だから、

$$t'=t+\frac{\sqrt{L^2+v^2t^2}}{V}=\frac{n}{2f}+\frac{\sqrt{L^2+v^2\left(\dfrac{n}{2f}\right)^2}}{V}$$ （nは正数）

Ⅱ.

(1) 伝わるまでの時間分の遅れが生じるので、P点に伝わる時刻は、$t'=t+\dfrac{\overline{SP}}{V}$、

$t'+\Delta t'=t+\Delta t+\dfrac{\overline{SP}+v\Delta t\cos\theta}{V}$ と表される。これより、$\Delta t'=\Delta t+\dfrac{v\Delta t\cos\theta}{V}$ である。

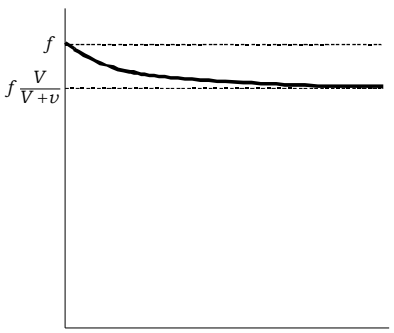
［別解］Ⅰ-(1) より、$t'=t+\dfrac{\sqrt{L^2+v^2t^2}}{V}$ …①、$t'+\Delta t'=(t+\Delta t)+\dfrac{\sqrt{L^2+v^2(t+\Delta t)^2}}{V}$ …② が成立する。これより、$\Delta t'=(t'+\Delta t')-t'=\Delta t+\left(\dfrac{\sqrt{L^2+v^2(t+\Delta t)^2}}{V}-\dfrac{\sqrt{L^2+v^2t^2}}{V}\right)$ であるので、$(\Delta t)^2$ の項をゼロと近似できるので、$\Delta t'\cong\Delta t+\dfrac{v^2t\,\Delta t}{V\sqrt{L^2+v^2t^2}}$ …③ である。

図より、$\dfrac{vt}{\sqrt{L^2+v^2t^2}}=\cos\theta$ …④ であるので、$\Delta t'\cong\Delta t+\dfrac{v\cos\theta}{V}\cdot\Delta t$ と表される。

(2) 波源Sでの周期 $T=\dfrac{1}{f}$[s] を Δt とすると、P点で観測される音の周期は $T'=\Delta t'$ であるから、観測される音の振動数を $f'=\dfrac{1}{T'}$ とすると、$\dfrac{1}{f'}=\dfrac{1}{f}+\dfrac{v\cos\theta}{V}\cdot\dfrac{1}{f}$ より、P点で観測される音の振動数は $f'=f\dfrac{V}{V+v\cos\theta}$ …⑤ と表せる。［参考］SPの方向と異なる方向に動いているときのドップラー効果は、「SP方向成分の速度」が関与することを示している。

(3) ⑤に④を代入して、$f'=f\dfrac{V}{V+\dfrac{v^2t}{\sqrt{L^2+v^2t^2}}}$ …⑥ である。

O点に近い（$t\cong0$）とき、$f'\cong f\dfrac{V}{V+kt}$ の関数形になるので、下に凸で減少関数。十分時間がたったとき、$f'\cong f\dfrac{V}{V+v}$ になるので、右にグラフの概形を示す。



Ⅲ

P点で観測される音の振動数が f_0 で一定になるようにするのだから、⑥より、$f_0=f\dfrac{V}{V+\dfrac{v^2t}{\sqrt{L^2+v^2t^2}}}$

が成立する。したがって、波源の音の振動数は $f=f_0\left(1+\dfrac{v^2t}{V\sqrt{L^2+v^2t^2}}\right)$ のように変化させればよい。