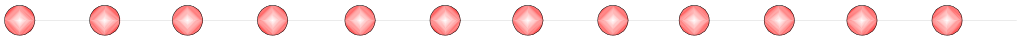
入試問題研究　第43回　東京工業大学　1994年　③　波動（物質内を伝わる波）

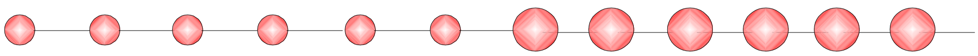


多数の質点が、互いにばねによってつながれて、直線状になっているものを考える。質点の質量を m 、ばね定数を G とする。

平衡状態では、図1（平衡状態）のように、すべての質点が静止していて、隣り合う質点の間隔は d である。ある質点が直線に沿った方向に振動すると、それが音波などに見られる縦波（粗密波）となって、次々に他の質点に伝わってゆく。その振動の様子は、図1（振動状態）のように、各質点の平衡状態での位置、$\bar{x}_n=nd$ からの変位 $\bar{z}_n=x_n-\bar{x}_n$ の時間変化によって表される。この媒質中を x の正方向に進む波は、たとえば、時刻 t での変位、$z_n=A\sin(\omega t-k\bar{x}_n)$ ･･･(1) で表される。（ただし、$A>0$ 、$\omega>0$ 、$k>0$ とする。）波長が d よりもずっと長い場合のみを考える事にすると、(1) 式の波は連続な媒質を伝わっていくと考えてよい。その時、波の速さ $v=\sqrt{\dfrac{G}{m}}d$ 、また、(1) の波が運ぶエネルギーは、単位時間当たり $S=\dfrac{\omega^2}{2d}mvA^2$ である。

(a)　(1) 式の波の波長と振動数を求めなさい。

(b)　波の速さ　v を(1) の ω と k で表しなさい。



次に、ばね定数 G 、および質点の間隔 d が同じで、質点の質量が異なる($M\neq m$)2つの媒質を図2のようにつないだものを考える。この媒質に上の(1) 式で表される波が左から進入したとする。以下でも、波の波長は d に比べて十分長いものとしなさい。

［A］　質量 M が m に比べて非常に大きいときには、入射波 (1) は $x=0$ で完全に反射される。反射波は入射波と重ね合わせられて定常波ができた。

(c)　この定常波における $z_n(n<0)$ の時間的変化を入射波と反射波の重ね合わせとして表す式を求め、空欄を埋めなさい。

$$z_n=(\qquad\qquad)+A\sin(\omega t-kx_n)$$

(d)　この定常波の節はどこに出来るか？ $x\leq 0$ の範囲で $x=0$ に最も近い2つの節の位置を求めなさい。波の波長は d の偶数倍であると仮定してよい。

［B］　質量 M が m に比べて非常に小さいときには、$x>0$ には波を伝える媒質がないものとする。$x=0$ で反射された反射波は入射波と同じ振幅をもっている。

(e)　この場合の $z_n(n<0)$ を表す式を求め、空欄を埋めなさい。

$$z_n=(\qquad\qquad)+A\sin(\omega t-kx_n)$$

［C］　$M=4m$ のとき、光の波がガラス面などに入射したときに起こるように、入射波の一部が反射されて振幅 B で x 負の向きに、残りは振幅 C で x 正の向きに伝わってゆく。このとき、$x=0$ での波の変位の連続性の条件より、$A-B=C$ が成り立つ。ここで A 、B 、C は正である。

(f)　B と C を A で表しなさい。

入試問題研究　第43回　東京工業大学　1994年　③　波動（物質内を伝わる波）

波の方程式を力学（バネの力による運動）を使って考える問題。

(a) 同時刻で、位相が 2π ずれる位置の最短距離が波長に相当する。

よって、$\{\omega t-k(\bar{x}_n+\lambda)\}+2\pi=(\omega t-k\bar{x}_n)$ が成立し、波長 λ を求めると、$\lambda=\dfrac{2\pi}{k}$ である。

同じ位置で1秒間の位相の変化は ω であり、1回振動するときの位相変化は 2π になる。

よって、この波の振動数は $f=\dfrac{\omega}{2\pi}$ である。　（注）波の方程式との対比でも求められるが…

(b) 波の速さは波長と振動数の積に等しいから、波の速さは $v=f\lambda=\left(\dfrac{\omega}{2\pi}\right)\cdot\left(\dfrac{2\pi}{k}\right)=\dfrac{\omega}{k}$ である。

［A］ 質量 M が m に比べて非常に大きいときには、質量 M の側（ $x>0$ ）は動かない（固定端反射）。

(c) $z_n(n<0)$ の時間的変化は $z_n=(-A\sin(\omega t+k\bar{x}_n))+A\sin(\omega t-k\bar{x}_n)$

(d) 三角関数の和積変換公式を適用して常に変位がゼロ（節の条件）の位置を求めればよい。

節の条件は $z_n=2A\sin(k\bar{x}_n)\cdot\cos(\omega t)=0$ が常に成立するだから、$\sin(k\bar{x}_n)=0$ である。

よって、$k\bar{x}_n=i\pi$ （iは整数）になるから $\bar{x}_n=\dfrac{i\pi}{k}=i\dfrac{\lambda}{2}$ となる。よって、反射端の位置が節で、

さらに、反射端から半波長の整数倍毎に節が並んでいる。

［B］ 質量 M が m に比べて非常に小さいときには、$x>0$ には波を伝える媒質がないから、$x=0$ で反射された反射波は入射波と同じ振幅をもっている（自由端反射）。

(e) この場合の $z_n(n<0)$ を表す式は $z_n=(A\sin(\omega t+k\bar{x}_n))+A\sin(\omega t-kx_n)$

［参考］なお、(d) と同様にすれば、定常波の節の位置が求めることができる。

［C］ $M=4m$ のとき、光の波がガラス面などに入射したときに起こるように、入射波の一部が反射されて振幅 B で x 負の向きに、残りは振幅 C で x 正の向きに伝わってゆく。

(f) $x<0$ での波の速度 $v=\sqrt{\dfrac{G}{m}}d$ とすると、$x>0$ では、波の速度が $V=\sqrt{\dfrac{G}{M}}d=\dfrac{v}{2}$ になる。

［参考］角振動数は変わらないから、$v=\dfrac{\omega}{k}$ より $K=2k$ になる。

入射波は $A\sin(\omega t-k\bar{x}_n)$ 、透過波は $C\sin(\omega t-2k\bar{x}_n)$ 、反射波は $B\sin(\omega t+k\bar{x}_n)$

になるから、原点における変位の連続性より、$A-B=C$ ･･･① が成り立つ。

未知数が A、B の2つであるから、①だけでは解けない。もう一つの式を見つけなければならない。

その糸口として、「波のエネルギーの流れの公式」が問題文中にあることに気付けばよい。

原点での波のエネルギーの流れの連続性より、$\dfrac{\omega^2}{2d}mvA^2-\dfrac{\omega^2}{2d}mvB^2=\dfrac{\omega^2}{2d}\cdot4m\cdot\dfrac{v}{2}\cdot C^2$ が成立

しなければならない。これを整理して $A^2-B^2=2C^2$ ･･･② が得られ、関係式2つになり、解けるのだ。

①を②に代入、整理して $3B^2-4AB+A^2=0$ より、$B=\dfrac{1}{3}A$ （ $B=A$ は題意に不適）、

①に代入して $C=\dfrac{2}{3}A$ である。