

入試問題研究 第47回 1997年 九州大学 第3問 原子

2つの重陽子が衝突して融合し、ヘリウム原子核と光子(γ 線)が発生する核反応 ${}^2_1\text{H} + {}^2_1\text{H} \rightarrow {}^4_2\text{He} + \gamma$ について考える。2個の重陽子が、その間に働く静電気力に逆らって、核力が働く距離 R まで近づいたとき核反応が起こるとする。重陽子を点粒子と考える。重陽子の間に働く静電気力による位置エネルギーは重陽子間の距離の逆数に比例する。この比例定数を K とする。重陽子の質量を m 、ヘリウム原子核の質量を M 、光の速さを c とする。 $|x| \ll 1$ のとき、 $\sqrt{1+x} \cong 1 + \frac{1}{2}x$ と近似できることを以下で用いてよい。文中の空欄に適当な数式を入れなさい。

- (1) 2つの重陽子が互いに充分離れた位置で逆向きの等しい速さ v_0 で近づいて正面衝突する場合、この核反応が起こるために必要な最低の v_0 の大きさを、 m 、 K 、 R を用いて表すと、 $v_0 = [\text{①}]$ となる。この核反応で、質量欠損によって放出される核エネルギー Q は、 $Q = [\text{②}]$ と表せる。
- (2) 1つの重陽子が速さ v_1 を持ち、充分離れた位置に静止しているもう1つの重陽子に近づいて正面から衝突する場合を考える。静電気力による斥力のため、静止していた方は加速され、もう一方は減速される。やがて、両方が同じ速さ(これを u とする)になったとき最も接近する。このときの距離を r とする(これより外では、まだ核力が働いていないとする)。充分離れているときと最も接近するときとで、運動量が保存されることを示す式は、 $[\text{③}]$ で与えられ、エネルギーが保存されることを示す式は、 $[\text{④}]$ で与えられる。核反応が起こるために必要な最低の v_1 の大きさを、 m 、 K 、 R を用いて表すと、 $v_1 = [\text{⑤}]$ となる。
- (3) 核反応で放出される核エネルギー Q がヘリウム原子核と光子にどのように分配されるかを考える。互いに充分離れた位置で逆向きに等しい速さ v_2 を持つ2つの重陽子が、近づいて正面衝突し核反応が起こったとき、重陽子の進行方向とは垂直な方向に光子が観測されたとする。この光子のエネルギーを E とし、ヘリウム原子核の速さを V とする。核反応の前後での運動量保存の法則から導かれる E の大きさを、 M 、 V 、 c を用いて表すと、 $E = [\text{⑥}]$ となり、エネルギー保存の法則から導かれる E の大きさを M 、 V 、 m 、 v_2 、 Q を用いて表すと、 $E = [\text{⑦}]$ となる。この2式から E を消去して V を求めると2つの候補解が得られるが、一方は不適当な解なので除外すると、 $V = [\text{⑧}]$ となる。ここで、「重陽子の運動エネルギーや質量欠損による放出核エネルギーは、ヘリウム原子核の質量と同等なエネルギーよりもはるかに小さい」ことを利用して V を近似すると、 $V = [\text{⑨}]$ が得られる。これを用いて E を計算すると、この核反応で放出される核エネルギーは、ほとんど光子(γ 線)が持ち去ることが分かる。

入試問題研究 第47回 1997年 九州大学 第3問 原子 解説

※ 原子といっても、 $E=mc^2$ のほかは、基本的には力学(運動量、エネルギーなどの計算)と電気だけなのです!

- (1) 2つの重陽子が互いに充分離れた位置で逆向きの等しい速さ v_0 を持ち、近づいて正面衝突する場合、この核反応が起こるためには距離が R 以内になればよい。力学的エネルギー保存の法則より、

$$\frac{1}{2}mv_0^2 \times 2 \geq K \frac{e^2}{R} \text{ であればよい。よって、必要な最低の } v_0 \text{ の大きさは } v_0 \geq \sqrt{\frac{Ke^2}{mR}} \dots \textcircled{1} \text{ である。この核}$$

反応での質量欠損が $2m - M$ だから、放出核エネルギーは、 $Q = (2m - M)c^2 \dots \textcircled{2}$ と表せる。

- (2) 1つの重陽子が速さ v_1 を持ち、充分離れた位置に静止しているもう1つの重陽子に近づいて正面から衝突する場合を考える。やがて、両方が同じ速さ(これを u とする)になったとき最も接近する。このときの距離を r とする(これより外では、まだ核力が働いていないとする)。充分離れているときと最も接近するときとで、運動量が保存されるので、 $mv_1 = 2mu \dots \textcircled{3}$ で与えられるので、 $u = \frac{1}{2}v_1$ である。また、エネルギーが保存される

$$\text{ことを示す式は、} \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}mu^2 \times 2 + K \frac{e^2}{r} \dots \textcircled{4} \text{ で与えられ、これより、} r = \frac{4Ke^2}{mv_1^2} \text{ である。核反応を起}$$

$$\text{こすためには } r = \frac{4Ke^2}{mv_1^2} < R \text{ だから、必要な最低の速度 } v_1 \text{ の大きさは、} v_1 > 2\sqrt{\frac{Ke^2}{mR}} \dots \textcircled{5} \text{ である。}$$

- (3) 互いに充分離れた位置で逆向きに等しい速さ v_2 を持つ2つの重陽子が、近づいて正面衝突し核反応が起こったとき、重陽子の進行方向とは垂直な方向に光子が観測されたとする。この光子のエネルギーを E とし、ヘリウム原子核の速さを V とする。核反応の前後での運動量保存の法則より、 $0 = \frac{E}{c} - MV$ になる。

また、エネルギー保存の法則より、 $\frac{1}{2}mv_2^2 \times 2 + Q = E + \frac{1}{2}MV^2$ だから、導かれる E の大きさを、 M, V, c を用いて表すと、 $E = McV \dots \textcircled{6}$ となる。また、エネルギー保存の法則から導かれる E の大きさは $E = mv_2^2 - \frac{1}{2}MV^2 + Q \dots \textcircled{7}$ となる。この2式から $McV = mv_2^2 - \frac{1}{2}MV^2 + Q$ だから、

$$\frac{1}{2}MV^2 + McV - (mv_2^2 + Q) = 0 \text{ になる。} V = \frac{-Mc \pm \sqrt{M^2c^2 + 2M(mv_2^2 + Q)}}{M} \text{ になる。}$$

$$2 \text{ つの候補解が得られるが、} V \text{ は正なので、} V = \frac{-Mc + \sqrt{M^2c^2 + 2M(mv_2^2 + Q)}}{M} \dots \textcircled{8} \text{ である。ここで、}$$

「重陽子の運動エネルギーや質量欠損による放出核エネルギーは、ヘリウム原子核の質量と同等なエネルギーよりもはるかに小さい」ことから $M^2c^2 \gg 2M(mv_2^2 + Q)$ だが成立し、 $1 \gg \frac{2M(mv_2^2 + Q)}{M^2c^2}$ になる。

$$V = \frac{-Mc + Mc\sqrt{1 + \frac{2M(mv_2^2 + Q)}{M^2c^2}}}{M} = c \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{2M(mv_2^2 + Q)}{M^2c^2}} \right) \text{ であるから、} |x| \ll 1 \text{ のとき、}$$

$$\sqrt{1+x} \cong 1 + \frac{1}{2}x \text{ と近似できるので、} V \cong c \left(-1 + 1 + \frac{M(mv_2^2 + Q)}{M^2c^2} \right) = \frac{M(mv_2^2 + Q)}{M^2c} \dots \textcircled{9} \text{ である。}$$

$$\text{これを用いて } E \text{ を計算すると、} E = McV = Mc \frac{M(mv_2^2 + Q)}{M^2c} = (mv_2^2 + Q) \text{ (始めの重陽子の運動エネル}$$

ギーと質量欠損による核エネルギーの和)になる。したがって、この核反応で放出される核エネルギーは、ほとんど光子(γ 線)が持ち去ることになり、ヘリウムの原子核は運動エネルギーをほとんど持たない。