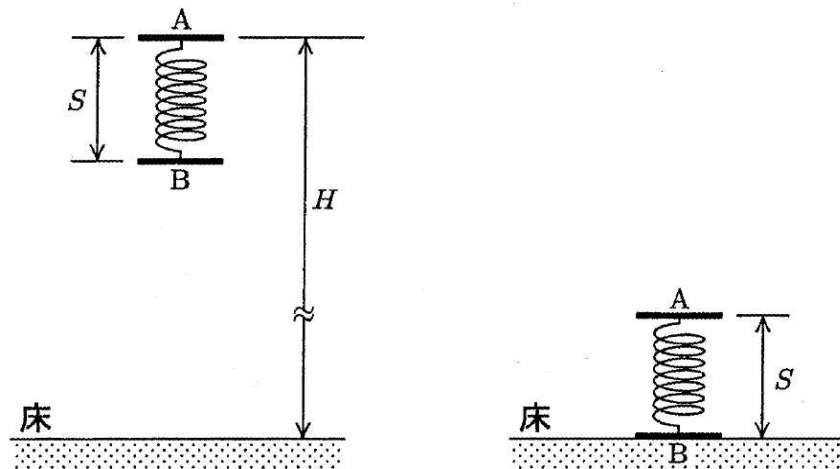


入試問題研究 第49回 2004年 京都大学 後期 ① 力学

次の文を読んで に適した式をそれぞれの解答欄に記入せよ。

質量がそれぞれ m の、厚さを無視できる同じ大きさの円板 A、B が、自然の長さが L 、バネ定数が k のばねで連結されている。これを「円板ばね系」とよぶことにする。ばねの質量と、円板ばね系の運動に対する空気の抵抗は無視できるものとする。また、重力加速度を g とする。



最初の状態

着地した瞬間の状態

最初、図1のように一方の円板 A を床から高さ H の位置に保持し、他方の円板 B を鉛直下方にぶら下げて静止させた。このときのばねの長さ S は、 L 、 m 、 k 、 g を使って表すと、
 ア である。

次に、円板 A を離したところ、円板ばね系は鉛直下方に落下し始めると同時に、ばねは縮み始め、その後、図2のように、ばねの長さがちょうど落下前の長さ S に初めて戻ったときに、円板 B が床に着地した。この間の運動を考えてみよう。ただし、ばねは常にフックの法則に従っていたとする。

ばねの張力を T 、円板 A、B の下向きの加速度をそれぞれ a 、 b とすると、円板 A の運動方程式は イ 、円板 B の運動方程式は ウ と表される。

この2つの運動方程式から、円板ばね系の重心の加速度 $\frac{1}{2}(a+b)$ は エ に等しいことが分かっている。一方、円板 B no 加速度と円板 A の加速度の差 $b-a =$ オ と書くことができる。

$b-a$ は、円板 A から見た円板 B no 相対速度の時間変化率であり、また、円板 A から見た円板 B の相対速度は、ばねの自然長からの伸び x の時間変化率に等しいことに着目すると、落下中のばねの長さの変化は単振動で表され、その周期は カ となることがわかる。したがって、円板ばね系が落下し始めてから円板 B が床に着地するまでに要した時間は キ となる。

以上により、最初に円板 A を保持していた高さ H は L 、 m 、 k 、 g を使って ク と表される。

床は粘着性が高く、円板 B は床に着地した後は床に付着したままであった。一方、円板 A は、円板 B が床に着地した後、さらに鉛直方向に単振動をした。この振動でばねが最も短くなるときの長さを求めよう。

円板 B がちょうど床に着地したときの円板 A の速度は ケ に等しい。このとき、ばねに蓄えられたエネルギーと、床面を基準とした円板 A の重力による位置エネルギーと、円板 A の運動エネルギーとの総和は コ となる。

次に、円板 B の着地後、ばねが最も短くなったときのばねの長さを h とする。このときに円板ばね系のもつエネルギーの総和を、 h を用いた式で表すと サ となる。

以上より h を求めると シ となる。

入試問題研究 第49回 2004年 京都大学 後期 ① 力学 (解説)

最初、ばねには円板 B の重力がかかるので、フックの法則 $mg=kx$ より、 $x=\frac{mg}{k}$ だけ、ばねが伸びる。よって、そのときのばねの長さは $S=L+\frac{mg}{k}$... [ア] である。次に手を離れたときの運動は、円板 A の運動方程式 $mg+T=ma$... [イ]、円板 B の運動方程式 $mg-T=mb$... [ウ] である。辺々足算し、整理すると、 $\frac{1}{2}(a+b)=g$... [エ] である。ばねの力の大きさは $T=kx$ だから、代入、整理すると $b-a=-\frac{2k}{m}x$... [オ] となる。これは円板 A からみた円板 B の加速度がばねの伸びに比例しているから、単振動の公式 $a=-\omega^2 x$ と比較して $\omega=\sqrt{\frac{2k}{m}}$ である。よって、この単振動の周期は $T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}$... [カ] となる。したがって、円板 B が床に着地した時間は1周期後だから、 $2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}$... [キ] である。

重心の落下の加速度は重力加速度だから、この間に落下した距離は $\frac{1}{2}g\left(2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}\right)^2=\frac{\pi^2 mg}{k}$ である。よって、円板 A の床からの高さは $\frac{\pi^2 mg}{k}+\left(L+\frac{mg}{k}\right)=L+\frac{(\pi^2+1)mg}{k}$... [ク] である。

床に落下後、円板 B は床に付着し、円板 A のみが単振動する。円板 B が床に着地のときの円板 A の速度は $v_0=g\cdot 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}=2\pi g\sqrt{\frac{m}{2k}}$... [ケ] である。このときのばねのエネルギー $\frac{1}{2}k\left(\frac{mg}{k}\right)^2$ 、重力による位置エネルギーは $mg\cdot\left(L+\frac{mg}{k}\right)$ 、運動エネルギーは $\frac{1}{2}m\left(2\pi g\sqrt{\frac{m}{2k}}\right)^2$ だから、総和は $\frac{m^2 g^2}{2k}+mgL+\frac{m^2 g^2}{k}+\frac{\pi^2 m^2 g^2}{k}=mgL+\frac{(3+2\pi^2)m^2 g^2}{2k}$... [コ] である。

円板 A の速度はゼロだから、力学的エネルギーの総和は $mgh+\frac{1}{2}k(L-h)^2$... [サ] である。力学的エネルギー保存の法則より、 $mgL+\frac{(3+2\pi^2)m^2 g^2}{2k}=mgh+\frac{1}{2}k(L-h)^2$ となる。

$\frac{1}{2}k(L-h)^2-mg(L-h)-\frac{(3+2\pi^2)m^2 g^2}{2k}=0$ だから、 $X=L-h$ として置き換え、整理すると、 $kX^2-2mgX-\frac{(3+2\pi^2)m^2 g^2}{k}=0$ より、 $X=\frac{mgk\pm\sqrt{(mgk)^2+k^2(3+2\pi^2)m^2 g^2}}{k^2}$ だから、そのときのばねの長さは $h=L-\frac{\{1+\sqrt{2(2+\pi^2)}\}mg}{k}$... [シ] である。なお、 $L-\frac{\{1-\sqrt{2(2+\pi^2)}\}mg}{k}$ は自然長より長くなるので題意に合わず不適解である。