入試問題研究　第54回　　1996年度　東京大学　①　　力学（単振動と円運動）

両端に質量 m の球のついたばね定数 k のばねが無重量状態の宇宙空間に静止している。初めこのばねは回転も振動もしておらず、そのばね長（両端間の距離）は l_0 であった。（図1）

(1) しばらく時間が経った後に再び観察したところ、ばねは振動していないがばね長が l になっており、両端の球は等速円運動をしていた（図2）。この等速円運動の角速度 ω はいくらか。ただし、ばねの質量は無視できる程小さいとする。

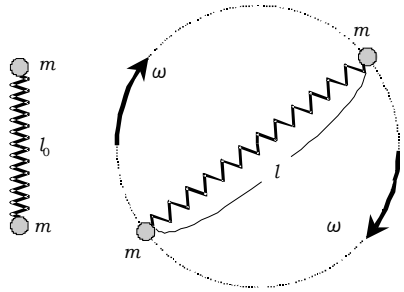

図1　　図2

(2) いま両端の球が同時に分裂し、その各々の球の円運動の方向と反対方向に質量 Δm の小片を放出した。その小片のもとの球に対する相対速度は v であり、またこの分裂はばねの振動運動を引き起こさなかった（図3）。この分裂後の球の円運動の角速度およびばね長の変化を $\omega \to \omega + \Delta\omega$ 、$l \to l + \Delta l$ とし、以下の問いに答えなさい。 ただし、 $\dfrac{\Delta m}{m}$、$\dfrac{\Delta m}{\omega}$、$\dfrac{\Delta l}{l}$ は絶対値がすべて1に比べて非常に小さいものとし、それらについて2次以上（例えば、$\left(\dfrac{\Delta m}{m}\right)^2$、$\left(\dfrac{\Delta m}{m}\right)\left(\dfrac{\Delta\omega}{\omega}\right)$ など）を無視して計算しなさい。

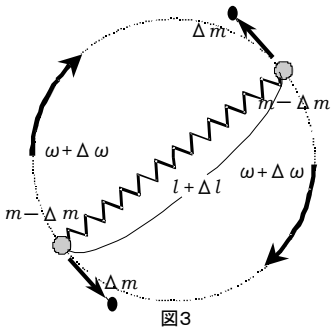

図3

A. 分裂後の球の円運動の角速度の変化分 $\Delta\omega$ を求めなさい。

B. 分裂後のばね長の変化分 Δl を求めなさい。

C. ばね長の変化分 Δl を分裂する際の小片の相対速度 v の関数として図示しなさい。また l が分裂の前後で変わらない（$\Delta l = 0$）特別な相対速度（臨界速度）v_0 があるが、Δl がこの臨界速度の前後、$v > v_0$ および $v < v_0$ で符号を変える理由を定性的に説明しなさい。

(3) 臨界速度 v_0 で分裂すると、ばね長が l に保たれたまま球の円運動の角速度が増加する。しかし、この過程で各々の球の運動エネルギーは一定で変化しないことを示しなさい。

入試問題研究　第54回　　1996年度　東京大学　①　　力学（単振動と円運動）

(1) 伸びは $l-l_0$ だから、ばねの力は $f=k(l-l_0)$。向心力とばねの力が等しいので $k(l-l_0)=m\frac{l}{2}\omega^2$ …① だから、回転の角速度は $\omega=\sqrt{\frac{2k(l-l_0)}{ml}}$ 、球の速度 $V_0=\frac{l}{2}\omega$ より、$V_0=\sqrt{\frac{k(l-l_0)l}{2m}}$ である。

(2) A. 分裂前後で運動量は保存する。分裂前は $V_0=\frac{l}{2}\omega$ …②、分裂後はそれぞれ、$m-\Delta m$ が V、Δm が $V-v$ だから、$mV_0=(m-\Delta m)V+\Delta m(V-v)$ より、$V=V_0+\frac{\Delta m}{m}v$ …③ である。角速度の関係から、$V=\frac{(l+\Delta l)}{2}(\omega+\Delta\omega)$ …④。また、ばねの力と向心力の関係から、$(m-\Delta m)\frac{(l+\Delta l)}{2}(\omega+\Delta\omega)^2=k(l+\Delta l-l_0)$ …⑤ である。①、③より、$\frac{V}{V_0}=\frac{(l+\Delta l)(\omega+\Delta\omega)}{l\omega}$ であるので、2次の項を無視すると、$\frac{V}{V_0}=\frac{(l+\Delta l)(\omega+\Delta\omega)}{l\omega}=1+\frac{\Delta\omega}{\omega}+\frac{\Delta l}{l}$ …⑥ である。また、②、③より、$\frac{V}{V_0}=1+\frac{\Delta m}{m}\frac{v}{V_0}=1+\frac{2v}{l\omega}\frac{\Delta m}{m}$ だから、⑥と合わせて $\frac{\Delta\omega}{\omega}+\frac{\Delta l}{l}=\frac{2v}{l\omega}\frac{\Delta m}{m}$ …⑦ である。また、⑤－①より、$k\Delta l=(m-\Delta m)\frac{(l+\Delta l)}{2}(\omega+\Delta\omega)^2-m\frac{l}{2}\omega^2$ だから両辺を $ml\omega^2$ で割って、2次の項を無視し整理すると $\frac{2k\Delta l}{ml\omega^2}=\left(1-\frac{\Delta m}{m}\right)\left(1+\frac{\Delta l}{l}\right)\left(1+\frac{\Delta\omega}{\omega}\right)^2-1$ だから、$\frac{2k}{m\omega^2}\frac{\Delta l}{l}=-\frac{\Delta m}{m}+\frac{\Delta l}{l}+\frac{2\Delta\omega}{\omega}$ になる。これを整理して、$\left(\frac{2k-m\omega^2}{m\omega^2}\right)\frac{\Delta l}{l}=-\frac{\Delta m}{m}+\frac{2\Delta\omega}{\omega}$ …⑧ である。⑦と⑧より、$\left(\frac{2k-m\omega^2}{m\omega^2}\right)\left(\frac{2v}{l\omega}\frac{\Delta m}{m}-\frac{\Delta\omega}{\omega}\right)=-\frac{\Delta m}{m}+\frac{2\Delta\omega}{\omega}$ だから、$\left(\frac{2k-m\omega^2}{m\omega^2}\frac{2v}{l\omega}+1\right)\frac{\Delta m}{m}=\left(2+\frac{2k-m\omega^2}{m\omega^2}\right)\frac{\Delta\omega}{\omega}$ より、$\left(\frac{4kv-2m\omega^2v+ml\omega^3}{ml\omega^3}\right)\frac{\Delta m}{m}=\left(\frac{m\omega^2+2k}{m\omega^2}\right)\frac{\Delta\omega}{\omega}$ から $\Delta\omega$ を求めると、 $\Delta\omega=\frac{4kv-2m\omega^2v+ml\omega^3}{l(m\omega^2+2k)}\frac{\Delta m}{m}$

B. ⑦、⑧より $\left(\frac{2k-m\omega^2}{m\omega^2}\right)\frac{\Delta l}{l}=-\frac{\Delta m}{m}+2\left(\frac{2v}{l\omega}\frac{\Delta m}{m}-\frac{\Delta l}{l}\right)$ だから、$\left(\frac{2k-m\omega^2}{m\omega^2}+2\right)\frac{\Delta l}{l}=\left(\frac{4v}{l\omega}-1\right)\frac{\Delta m}{m}$ だから、$\left(\frac{2k+m\omega^2}{m\omega^2}\right)\frac{\Delta l}{l}=\left(\frac{4v-l\omega}{l\omega}\right)\frac{\Delta m}{m}$ より、$\Delta l=\frac{\omega(4v-l\omega)\Delta m}{(2k+m\omega^2)}$ …⑨ である。

C. ⑨式より、$\Delta l=\frac{\omega(4v-l\omega)\Delta m}{(2k+m\omega^2)}$ だから、小片の分離速度 $v_0=\frac{l\omega}{4}\left(=\frac{V_0}{2}\right)$ …⑩ のときがばねの伸縮の切り替わりになる。すなわち、$v_0<\frac{V_0}{2}$ のとき、放出後ばねは縮み、$v_0>\frac{V_0}{2}$ のとき、ばねは伸びることになる。

(3) $v_0=\frac{l\omega}{4}\left(=\frac{V_0}{2}\right)$ のとき、ばねの伸びは一定（回転半径は一定）である。物体の運動エネルギーは $\frac{1}{2}m\left(\frac{l\omega}{2}\right)^2\times2$ から、$\frac{1}{2}(m-\Delta m)\left\{\frac{l(\omega+\Delta\omega)}{2}\right\}^2\times2$ より、変化は $\Delta U=(m-\Delta m)\left\{\frac{l(\omega+\Delta\omega)}{2}\right\}^2-m\left(\frac{l\omega}{2}\right)^2$ だから、

$\Delta U=m\left(\frac{l\omega}{2}\right)^2\left\{\left(1-\frac{\Delta m}{m}\right)\left(1+\frac{\Delta\omega}{\omega}\right)^2-1\right\}=m\left(\frac{l\omega}{2}\right)^2\left\{\frac{2\Delta\omega}{\omega}-\frac{\Delta m}{m}\right\}$ になる。このときのばねの伸びの変化ゼロ（$\Delta l=0$）を⑧式に代入すると $\frac{2\Delta\omega}{\omega}-\frac{\Delta m}{m}=\left(\frac{2k-m\omega^2}{m\omega^2}\right)\frac{\Delta l}{l}=0$ だから、運動エネルギーの変化は $\Delta U=0$ となり、運動エネルギーの和は一定値を保つことが分かる。