大学入試問題研究　第56回　2001年　東京大学　波動（光）

図1はヤングの干渉実験を示したものである。電球Vはフィルター F で囲まれていて、赤い光（波長 λ）だけを透過するようにしてある。電球 V から出た光はスクリーン A 上のスリット S_0、およびスクリーン C 上に干渉縞を作る。スクリーン A、B、C は互いに平行で、AB 間の距離は L、BC 間の距離は R である。S_1 と S_2 のスリット間距離は d とし、S_1S_2 の垂直2等分線がスクリーン A と交わる点を M、スクリーン C と交わる点を O とする。また、スクリーン C 上の座標軸 x を、O を原点として図1のようになる。このとき次の問いに答えよ。必要に応じて整数を表す記号として m、n を用いよ。

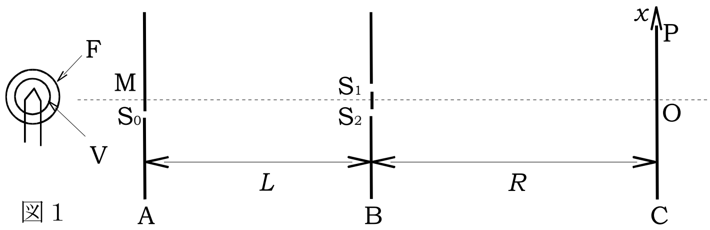


図１

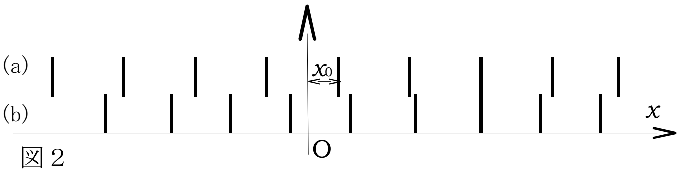


図２

(1) スリット S_0 が M の位置にある場合を考える。干渉縞の明線、暗線が現れる x 座標の値をそれぞれ示せ。ただし、スクリーン上の点を P とするとき、S_1 と P との距離を $\overline{S_1P}$ などと表すと、$(\overline{S_1P}-\overline{S_2P})(\overline{S_1P}+\overline{S_2P})=\overline{S_1P}^2-\overline{S_2P}^2$ が成り立つことを利用し、$\overline{OP}$、d が R と比べて十分小さいとして、$\overline{S_1P}+\overline{S_2P}=2R$ としてよい。

(2) スクリーン A を取り除くと、スクリーン C 上の干渉縞は消滅した。その理由を簡潔に述べよ。

(3) スクリーン A 上のスリット S_0 を、M から下側方向に h だけ僅かにずらした。このとき、スクリーン C 上で干渉縞の明線が現れる x 座標の値を求めよ。ただし、h は L に比べて十分小さいとする。

(4) (3)の状態のとき、スクリーン C 上に現れる干渉縞の明線の位置は図 2(a)のようであった。この結果から S_0 の位置 h を測定したい。ところが図 2(a)からだけでは、どの干渉縞の明線がどのような干渉によって乗じているかがわからない。そこで、フィルター F を交換して、緑の光（波長 λ'）だけを透過するようにした。そのとき、スクリーン C 上に現れる干渉縞の明線の位置は図 2(b)のようになった。図 2(a)で、x 方向で原点に最も近い明線の位置を x_0 とするとき、h を x_0 を用いて表せ。

(5) (3)の状態でスクリーン A 上にもう一つのスリット S_0' を開ける。S_0' の位置は S_1S_2 の垂直二等分線に対して S_0 と対称な位置とする。このとき、スクリーン C 上の干渉縞の明線が最も明瞭となるときの h を求めよ。

大学入試問題研究　第56回　2001年　東京大学　波動（光）（解答・解説）

(1) この場合は、普通の「ヤングの実験」そのものなので、簡単です。ただし、問題文章中に指定の解法がありますので、記述する場合、指定通りの途中式が必要です。

$\overline{S_1P}=\sqrt{R^2+\left(x-\frac{d}{2}\right)^2}$ 、 $\overline{S_2P}=\sqrt{R^2+\left(x+\frac{d}{2}\right)^2}$ より $(\overline{S_1P}-\overline{S_2P})(\overline{S_1P}+\overline{S_2P})=\overline{S_1P}^2-\overline{S_2P}^2$ と

$\overline{S_1P}+\overline{S_2P}=2R$ を使って、代入して整理すると、距離の差 $\overline{S_1P}-\overline{S_2P}$ が $-\frac{dx}{R}$ になる。

よって、光が強めあう条件は $\frac{dx}{R}=m\lambda$ より、明線の位置は $x=\frac{mR\lambda}{d}$ (mは整数) である。

弱め合う条件は $\frac{dx}{R}=\left(m+\frac{1}{2}\right)\lambda$ より、暗線の位置は $x=\left(m+\frac{1}{2}\right)\frac{R\lambda}{d}$ (mは整数) である。

(2) 光源からの光の経路が無数に出来て、それぞれの経路の距離の差が無数に存在し、強めあう、弱め合うなどの条件が定まらない。よって、どの位置も平均化されて、明暗の縞模様（干渉による現象）が見られなくなる。

(3) 左の部分でも距離の差が生じる。それも考慮すればよいだけ。(1)の x を $-h$ に、また R を L と入れ替えただけのことだから、距離の差 $\overline{S_0S_1}-\overline{S_0S_2}$ が $\frac{dh}{L}$ になる。左右の距離の差をあわせると、全体の距離の差は $\frac{dh}{L}-\frac{dx}{R}$ だから、強め合う条件に代入すると、

$\frac{dh}{L}-\frac{dx}{R}=m\lambda$ になり、 $x=-\frac{mR\lambda}{d}+\frac{Rh}{L}$ になり、 $\frac{Rh}{L}$ だけ平行移動するだけだ。

(4) 次に、整数値 m の値を決めるのだが、 $m=0$ の場合、全ての色（波長が異なっても）で条件が一致する。赤と緑で調べた結果から図 2 (a) の右から3番目が $m=0$ である。したがって、中心線から明暗の干渉縞の間隔2つ分と x_0 分のずれになるから、 $\frac{Rh}{L}=2\frac{R\lambda}{d}+x_0$ になる。 $h=\frac{2L\lambda}{d}+\frac{Lx_0}{R}$ である。

(5) 光の通り道として4つのコースが存在する。4つのコースの光が

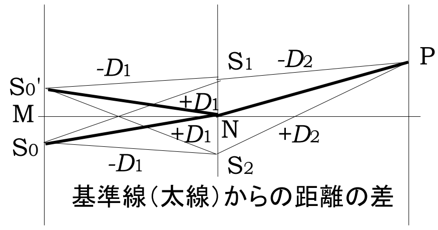
(6)全て同位相になれば最も明るくなり、干渉縞模様が明瞭に見える。

［解法①］ 左側での距離の差が波長の整数倍であればよいので S_0S_1P と $S_0'S_1P$ の経路の差を求める。距離の差は $\frac{2dh}{L}$ になり、 $\frac{2dh}{L}=m'\lambda$ ･･･②の条件が成立すればよい。

よって、干渉の縞模様が最も明瞭になるのは $h=\frac{m'L\lambda}{2d}$ （ m' は整数）のときである。

［解法②(失敗例)］「波の重ね合わせの法則」から光の強さ（振幅）を徹底的に厳密に計算してみる。S_1S_2 の垂直2等分線がスクリーン A と交わる点を M、B と交わる点を N としよう。使う公式は波の方程式 $y=A\sin\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)$ 、 $\omega=\frac{2\pi}{T}$ 、 $\lambda=vT$ である。

S_0N と S_0S_1、S_0S_2 のそれぞれの距離の差は $\pm\dfrac{dh}{2L}$ 、



NP と S_1P、S_2P のそれぞれの距離の差は $\mp\dfrac{dx}{2R}$ である。

S_0NP の距離を D_0（$= S_0N + NP = S_0'N + NP$）、$D_1=\dfrac{dh}{2L}$ 、

$D_2=\dfrac{dx}{2R}$ とする。

経路の長さを D_0、D_1、D_2 を使って示すと $S_0'S_1P = D_0-D_1-D_2$ 、$S_0'S_2P = D_0+D_1+D_2$ 、$S_0S_1P = D_0+D_1-D_2$ 、$S_0S_2P = D_0-D_1+D_2$ になる。よって、4つの波の方程式を作り、その和を求めればよい。和積変換公式を用いて1つにまとめることで干渉した波を表す。左のスクリーン A での波を $y=A\sin\omega t$ とすると、それぞれのコースを通り点 P に達した波の方程式は次のようになる。

$$y_1=A\sin\omega\left(t-\frac{D_0+D_1+D_2}{c}\right)\ \cdots①、\quad y_2=A\sin\omega\left(t-\frac{D_0-D_1+D_2}{c}\right)\ \cdots②、$$

$$y_3=A\sin\omega\left(t-\frac{D_0+D_1-D_2}{c}\right)\ \cdots③、\quad y_4=A\sin\omega\left(t-\frac{D_0-D_1-D_2}{c}\right)\ \cdots④$$

よって、干渉波は $y=y_1+y_2+y_3+y_4$ になる。 $y=(y_2+y_3)+(y_1+y_4)$ として和積変換公式 $\sin a+\sin b=2\sin\dfrac{a+b}{2}\cos\dfrac{a-b}{2}$ を使って整理してみよう。

$y_2+y_3=2A\sin\omega(t-D_0)\cdot\cos\dfrac{\omega(D_1-D_2)}{c}$ 、$y_1+y_4=2A\sin\omega(t-D_0)\cdot\cos\dfrac{\omega(D_1+D_2)}{c}$ より、

$y=y_1+y_2+y_3+y_4$ は $y=2A\left(\cos\dfrac{\omega(D_1-D_2)}{c}+\cos\dfrac{\omega(D_1+D_2)}{c}\right)\cdot\sin\omega t$ になる。

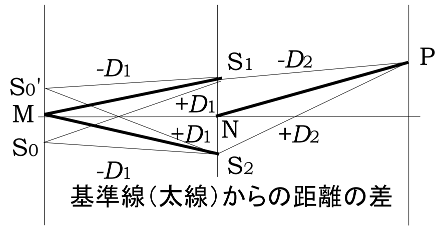
振幅が大きいほど干渉の縞の明線は明瞭だから、 $2A\left(\cos\dfrac{\omega(D_1-D_2)}{c}+\cos\dfrac{\omega(D_1+D_2)}{c}\right)$ である。括弧内部を和積変換公式 $\cos a+\cos b=2\cos\dfrac{a+b}{2}\cos\dfrac{a-b}{2}$ を使って整理すると、

$2A\left(\cos\dfrac{\omega(D_1-D_2)}{c}+\cos\dfrac{\omega(D_1+D_2)}{c}\right)=4A\cos\dfrac{\omega D_1}{c}\cos\dfrac{\omega D_2}{c}$ になる。振幅最大になるとき $\dfrac{\omega D_1}{c}=m\pi$ かつ $\dfrac{\omega D_2}{c}=n\pi$ であればよいので $h=\dfrac{mL\lambda}{d}$ 、 $x=\dfrac{nL\lambda}{d}$ の時である。

これでは **［解法①］** の答えとは合わない。それは振動項の部分に D_0 が含まれ、 D_0 に h が含まれているからだ。そのため $\cos\dfrac{\omega D_1}{c}$ の部分だけでは、最大値が決まらなくなっているのだ（失敗）。 では、どうすればよいのか。 次に改訂版を作ってみよう。

［解法②改訂版］ 「波の重ね合わせの法則」から光の強さ（振幅）を徹底的に厳密に計算してみる。S_1S_2 の垂直2等分線がスクリーン A と交わる点を M、B と交わる点を N としよう。使う公

式は波の方程式 $y=A\sin\omega\left(t-\dfrac{x}{v}\right)$ 、$\omega=\dfrac{2\pi}{T}$ 、$\lambda=vT$ である。注意しなければいけないのは、h を限定できるようにすることだ。基準点をM、(S_1 と S_2)、Pとする。



MS₁とS₀S₁、S₀'S₁のそれぞれの距離の差は $\pm\dfrac{dh}{L}$ であり、NPとS_1P、S_2Pのそれぞれの距離の差は $\mp\dfrac{dx}{2R}$ である。MS_1P(=MS_2P) の距離を D_0 (= MS_1 + NP=MS_2 + NP)、$D_1=\dfrac{dh}{L}$ 、$D_2=\dfrac{dx}{2R}$ とする。

経路の長さをD_0、D_1、D_2を使って示すと $S_0'S_1P = D_0-D_1-D_2$ 、$S_0'S_2P = D_0+D_1+D_2$ 、$S_0S_1P = D_0+D_1-D_2$ 、$S_0S_2P = D_0-D_1+D_2$ になる。よって、4つの波の方程式を作り、その和を求めればよい。和積変換公式を用いて1つにまとめることで干渉した波を表す。左のスクリーンAでの波を $y=A\sin\omega t$ とすると、それぞれのコースを通り点Pに達した波の方程式は次のようになる。

$$y_1=A\sin\omega\left(t-\frac{D_0+D_1+D_2}{c}\right)\ \cdots①、\quad y_2=A\sin\omega\left(t-\frac{D_0-D_1+D_2}{c}\right)\ \cdots②、$$

$$y_3=A\sin\omega\left(t-\frac{D_0+D_1-D_2}{c}\right)\ \cdots③、\quad y_4=A\sin\omega\left(t-\frac{D_0-D_1-D_2}{c}\right)\ \cdots④$$

よって、干渉波は $y=y_1+y_2+y_3+y_4$ になる。$y=(y_1+y_2)+(y_3+y_4)$ として和積変換公式 $\sin a+\sin b=2\sin\dfrac{a+b}{2}\cos\dfrac{a-b}{2}$ を使って整理してみよう。

$y_1+y_2=2A\sin\omega(t-D_0+D_2)\cdot\cos\dfrac{\omega D_1}{c}$ 、$y_3+y_4=2A\sin\omega(t-D_0+D_2)\cdot\cos\dfrac{\omega D_1}{c}$ より、

$y=y_1+y_2+y_3+y_4$ は $y=2A\left(\sin\dfrac{\omega(t-D_0-D_2)}{c}+\sin\dfrac{\omega(t-D_0+D_2)}{c}\right)\cdot\cos\dfrac{\omega D_1}{c}$ になる。

更にカッコ内を和積変換公式を適用して整理すると、

$y=4A\cdot\sin\omega\left(t-\dfrac{D_0}{c}\right)\cdot\cos\dfrac{\omega D_2}{c}\cdot\cos\dfrac{\omega D_1}{c}$ になる。振幅最大になるとき $\dfrac{\omega D_1}{c}=m\pi$ かつ $\dfrac{\omega D_2}{c}=n\pi$ であればよいので $h=\dfrac{mL\lambda}{2d}$ 、$x=\dfrac{nR\lambda}{d}$ の時である。

今回は h は D_1 のみに含まれるため、h の変化に対する変化が $\cos\dfrac{\omega D_2}{c}$ の部分にのみ依存するため、最大値はこの部分の最大値をとる条件 $\dfrac{\omega D_1}{c}=m\pi$ だけで決定できる。ほんの少しの注意だけのことですが...（教訓！）