入試問題研究　第57回　　2002年度 京都大学　前期②　電磁誘導の法則

次の文A、Bを読んで、[　　] に適した式をそれぞれ記入しなさい。なお、単位系は国際単位系(SI)を用い、すべての装置は真空中に置かれているものとして、真空の透磁率をμ_0とする。

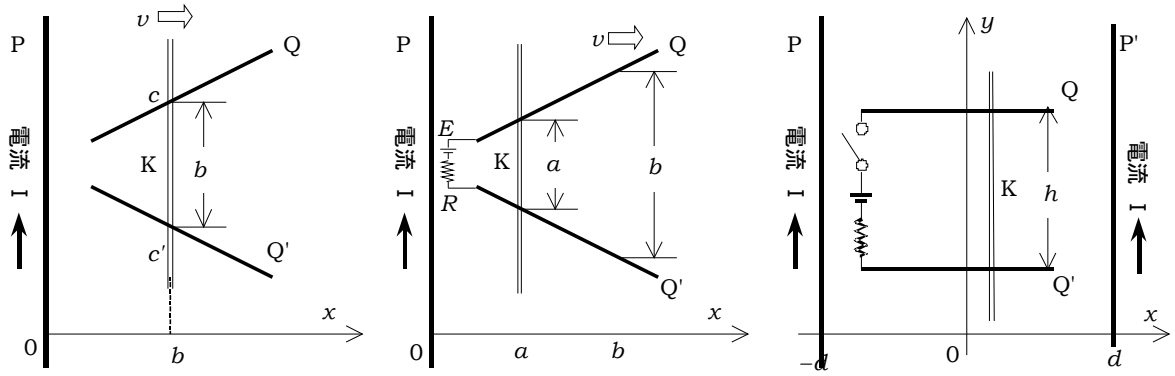

図1　　図2　　図3

A. 図1および図2に示すように、水平面上にある十分長い直線導体Pに直流電流Iが流れている。2本の直線導体QおよびQ' が導体Pを含む水平面内にあり、導体Pから距離xの位置において導体QとQ'の間隔がxに等しくなるように配置されている。これらの2本の導体の上に、質量mの直線導体Kが置かれていて導体Pと平行のままx方向に摩擦なしで動くことが出来る。

(1) 図1に示すように、導体Kを一定の速度vで運動させる。導体Kが $x=b$ に達したとき、導体Kの位置における磁束密度の大きさは [あ] で与えられ、導体Kが導体Qと導体Q' と接触する2つの点cとc' の間に発生する起電力は [い] となる。

(2) 図2に示すように、導体Kが位置$x=a$に静止した状態で、導体Qと導体Q' の間の抵抗Rを介して起電力Eの電池を接続し、ループ回路を構成する。ただし、導体の抵抗は抵抗Rに比べ十分に小さく、また、ループ回路を流れる電流が作る磁界は直線電流Iが作る磁界に比べて十分に小さく、いずれも無視できるものとする。このとき、導体Kには大きさ [う] の力が働き、x方向に動き始める。$x=b$に達したときに導体Kの速度がvであったとすると、そのとき、導体Kを流れる電流は [え] であり、導体Kの加速度は [お] と表される。そして、十分長い時間がたつと、導体Kの速度は一定値 [か] に近づいていく。

B. 図3に示すように、2本の十分長い直線導体PおよびP' がy軸に平行に $x=-d$ および、$x=d$ の位置に並んでいて、いずれにもy軸の正の方向に電流が流れている。これらの導体と同じ平面内にx軸に平行な2本の直線導体QおよびQ' が間隔hで並んでいて、導体Qと導体Q' の上にはy軸に平行のまま摩擦なしにx軸に沿って動くことのできる質量mの直線導体Kが置かれている。ここでx軸、y軸は水平面内にある。導体Qと導体Q' の間には、抵抗RとスイッチSを介して起電力Eの電池が接続されており、はじめはスイッチを開いておく。導体の抵抗は抵抗Rに比べて十分に小さく、また、ループ回路を流れる電流が作る磁界は電流Iが作る磁界に比べて十分小さく、いずれも無視できるものとする。

(1) 紙面に対して上向きをz軸正の方向とすると、位置xにおけるz方向の磁束密度は [き] で与えられる。導体Kが原点 $x=0$ 近傍の位置 $x=b$ に静止した状態でスイッチSを閉じると、導体Kにはx方向の力 [く] が働く。 距離 b が d に比べて十分短く $b << d$ が成り立つとき、導体Kに働くx方向の力は [け] と近似することができる。

(2) 初期位置 $x=b$ が原点 $x=0$ に十分近く、導体Kが磁界中を動くことによって発生する起電力は電池の起電力Eに比べて無視できると仮定する。このとき、導体Kは $x=0$ の近傍において、角振動数
$\omega =$ [こ] で単振動する。

(3) 導体Kが磁界中を動くことによって発生する起電力が電池の起電力に比べて無視できる条件を求めてみよう。はじめに導体Kが $x=b$ の位置で静止」していて、スイッチSを閉じた後 $x=0$ のまわりで、単振動しているとき、導体Kに発生する起電力の最大値は角振動数 ω を用いて [さ] と表される。
したがって、この起電力が電池の起電力Eに比べて無視できるための条件は、(2) で求めた ω の表式を代入することによって、$b <<$ [し] と表される。

入試問題研究　第57回　　2002年度 京都大学　前期②　電磁誘導の法則

A.

(1) 図1で、導体Kが $x=b$ に達したとき、導体Kでの磁束密度の大きさは $B=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi b}$ …（あ）で与えられ、導体Kが導体 Q と導体 Q' と接触する2つの点cとc' の間に発生する起電力は $V=\upsilon Bl=\dfrac{\mu_0 I\upsilon}{2\pi}$ …（い） となる。

(2) 磁界から電流がうける力は、導体Kには大きさ $f=\dfrac{E}{R}\cdot\dfrac{\mu_0 I}{2\pi a}\cdot a=\dfrac{\mu_0 EI}{2\pi R}$ …（う）の力が働く。$x=b$ に達したときに導体Kの速度が υ であったとすると、導体Kには $V=\upsilon\cdot\dfrac{\mu_0 I}{2\pi b}\cdot b=\dfrac{\mu_0 I\upsilon}{2\pi}$ の電圧が生じ、導体Kを流れる電流は $I'=\dfrac{E-\dfrac{\mu_0 I\upsilon}{2\pi}}{R}=\dfrac{2\pi E-\mu_0 I\upsilon}{2\pi R}$ …（え） で、導体Kの運動方程式は $ma=\dfrac{2\pi E-\mu_0 I\upsilon}{2\pi R}\cdot\dfrac{\mu_0 I}{2\pi b}\cdot b$ だから、加速度は $a=\dfrac{\mu_0 I(2\pi E-\mu_0 I\upsilon)}{4\pi^2 mR}$ ・・・（お） と表される。十分長い時間がたつと、導体Kの速度は一定値（加速度 $a=0$ ）になるので、$\upsilon=\dfrac{2\pi E}{\mu_0 I}$ …（か） に近づいていく。

B.

(1) 裏から表向きを z 軸正とすると、位置 x における z 方向の磁束密度は $B=-\dfrac{\mu_0 I}{2\pi(d+x)}+\dfrac{\mu_0 I}{2\pi(d-x)}$ …（き） だ。導体Kが原点 $x=0$ 近傍の位置 $x=b$ に静止した状態でスイッチSを閉じると、その位置での磁束密度は $B=-\dfrac{\mu_0 I}{2\pi(d+b)}+\dfrac{\mu_0 I}{2\pi(d-b)}=\dfrac{\mu_0 Ib}{\pi(d^2-b^2)}$ である。スイッチを閉じると電流が $I=\dfrac{E}{R}$ 流れるので、磁界から電流が受ける力の公式 $f=IBL\sin\theta$ より、$f=\dfrac{E}{R}\cdot\left(\dfrac{\mu_0 Ib}{\pi(d^2-b^2)}\right)\cdot h$ ・・・（く）である。b が小さい時の近似をとると、$-\dfrac{\mu_0 I}{2\pi(d+b)}+\dfrac{\mu_0 I}{2\pi(d-b)}=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi d}\left\{-\dfrac{1}{1+b/d}+\dfrac{1}{1-b/d}\right\}$ より、$\dfrac{b}{d}\cong 0$ だから、$\dfrac{1}{1\pm b/d}\cong 1\mp\dfrac{b}{d}$ の近似式が成立するので、$B=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi d}\left\{-\dfrac{1}{1+b/d}+\dfrac{1}{1-b/d}\right\}\cong=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi d}\left\{-\left(1-\dfrac{b}{d}\right)+\left(1+\dfrac{b}{d}\right)\right\}=\dfrac{\mu_0 bI}{\pi d^2}$ と近似できる。また、電流が受ける力は、向きがフレミングの左手の法則より x 軸負の方向になる。よって、磁界から電流が受ける力の公式 $f=IBl\sin\theta$ より、導体Kに働く x 方向の力は $f=-\dfrac{E}{R}\cdot\dfrac{\mu_0 bI}{\pi d^2}\cdot h$ …（け） になる。

(2) 導体Kの運動方程式は $ma=-\dfrac{\mu_0 IEh}{\pi d^2 R}b$ だから、加速度は $a=-\dfrac{\mu_0 IEh}{\pi d^2 mR}b$ になり、変位 x に加速度の大きさが比例し、向きが反対になっている。これは単振動運動になることを示しており、このときの単振動の角振動数ω = $\sqrt{\dfrac{\mu_0 IEh}{\pi d^2 mR}}$ …（こ） で単振動する。単振動の公式より、位置は $x=b\cos\omega t$ 、速度は $\upsilon=-b\omega\sin\omega t$ である。また、その位置での磁束密度が $B=\dfrac{\mu_0 xI}{\pi d^2}$ だから、導体Kに発生する起電力の大きさは、$V=b\omega\sin\omega t\cdot\dfrac{\mu_0 Ib\cos\omega t}{\pi d^2}\cdot h$ だから、起電力の最大値は $V=\dfrac{\mu_0 Ib^2 h\omega}{\pi d^2}\cdot\sin\omega t\cos\omega t\le\dfrac{\mu_0 Ib^2 h\omega}{2\pi d^2}$ …（さ）（$\because\left|\sin\theta\cos\theta\right|=\left|\dfrac{1}{2}\sin 2\theta\right|\le 1$ ）である。したがって、この起電力が電池の起電力 E に比べて無視できるための条件は、$\dfrac{\mu_0 Ib^2 h\omega}{2\pi d^2}<<E$ であるから、(2) で求めた ω = $\sqrt{\dfrac{\mu_0 IEh}{\pi d^2 mR}}$ を代入して、$\dfrac{\mu_0 Ib^2 h}{2\pi d^2}\sqrt{\dfrac{\mu_0 IEh}{\pi d^2 mR}}<<E$ だから、$b<<\sqrt{\dfrac{2\pi d^3}{\mu_0 Ih}}\sqrt{\dfrac{\pi mER}{\mu_0 Ih}}$ …（し） と表される。