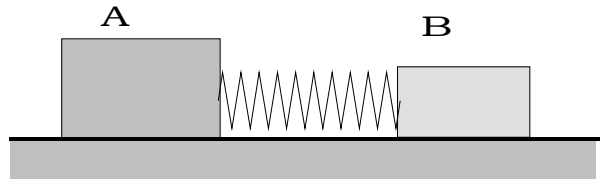


入試問題研究 第58回 1995年度 大阪市立大学 前期 (改作)

質量 M [kg] の物体A、質量 m [kg] の物体B および質量を無視できるばねがある。図1のように、物体Aと物体Bでばねをはさんで、このばねを自然長の位置から A [m] 圧縮してなめらかな摩擦のない水平面Pの上に置いてある。



物体A、Bを静かにはなしたところ、両物体は互いに反対方向に動き出した。ばねの自然長を L [m]、ばね定数を k [N/m]、重力加速度を g [m/s²] として、次の問に答えなさい。ただし、物体Aと物体Bの大きさは無視できるものとし、最初は、物体A、物体Bとばねは連結されていないものとする。

最初、物体Aから見た物体Bの運動を求めてみよう。床から見た物体Aの加速度を α_A とする。ばねが x 伸びているときに物体Bにかかる力は、ばねの力が ① 向きに、② の大きさになり、また、慣性力が ③ 向きに、④ の大きさである。したがって、物体Aからみた物体Bの加速度を α_B とすると、物体Bの運動方程式は ⑤ …(1) である。また、ばねの力が ⑥ 向きに、⑦ だから、物体Aの運動方程式は、⑧ …(2) である。

問1 上の空欄に適当な数式を入れなさい。

問2 ばねが x [m] 伸びているときの、床から見た物体Aの加速度を求めなさい。

問3 ばねが x [m] 伸びているときの、物体Aから見た物体Bの加速度を求めなさい。

問4 時刻 t [s] のとき、物体A、B間の距離を求めなさい。

問5 物体A、Bがバネから離れるまでの時間を求めなさい。

問6 ばねから離れた後、物体A、Bはどのような速度で動いているか。

上の設定と同じ条件を、Aから見たBの相対運動としての解析から、A、B共に床から見た絶対運動として解析してみよう。床から見た物体A、Bの加速度を α_A 、 α_B 、手を離す直前の物体A、Bの位置を $x_A = 0$ 、 $x_B = L - A$ とする。

問7 手を離した直後において、物体A、Bの運動方程式を示し、それぞれの加速度を求めなさい。

問8 t [s] のときの物体A、Bの位置を x_A 、 x_B にあるとし、そのときの物体A、Bの運動方程式を示し、それぞれの加速度を求めなさい。

問9 この場合、全体の重心位置が動かないことを使って、このときの物体A、Bの運動(単振動)の周期を求めなさい。〔挑戦〕 t 秒のときの位置、速度も求められるかな？

入試問題研究 第58回 1995年度 大阪市立大学 前期 (改作)

問1 物体Aから見た物体Bの運動を求めてみよう。ばねが x 伸びているときに物体Bにかかる力は、ばねの力が 右…① 向きに、 $F = -kx$ …② の大きさ(左向きに、 $F = kx$)になり、また、慣性力は物体Aが右に加速度 α_A で動いているので、左…③ 向きに $m\alpha_A$ …④ の大きさ(右向きに $-m\alpha_A$ の大きさ)である。したがって、物体Aから見た物体Bの加速度を α_B とすると、物体Bの運動方程式は $m\alpha_B = -kx - m\alpha_A$ …⑤ である。また、床から見た物体Aの加速度を α_A とすると、ばねの力が、右…⑥ 向きに kx …⑦ だから、物体Aの運動方程式は、 $M\alpha_A = kx$ …⑧ である。

問2 ⑤、⑧の二つの運動方程式 $m\alpha_B = -kx - m\alpha_A$ …(1)、 $M\alpha_A = kx$ …(2) より、床から見た物体Aの加速度 α_A は $\alpha_A = \frac{k}{M}x$ …(3) である。

問3 (1)に(3)を代入して、 $m\alpha_B = -kx - m\frac{k}{M}x = -\frac{k(m+M)}{M}x$ だから、物体Aから見た物体Bの加速度は $\alpha_B = -\frac{k(m+M)}{mM}x$ である。

問4 物体Aから見た物体Bの加速度は $\alpha_B = -\frac{k(m+M)}{mM}x$ であるから、物体Aから見た物体Bは単振動をすることが

わかる。単振動の条件式 $a = -\omega^2 x$ と比較して、 $\omega = \sqrt{\frac{k(m+M)}{mM}}$ である。また、時刻 $t = 0$ のとき、ばねが

自然長 L から A 縮んでいるので、物体A、B間の距離は $X = L - A \cos \sqrt{\frac{k(m+M)}{mM}} \cdot t$ である。

問5 ばねが自然長になったときに物体A、Bがばねから離れる。したがって、単振動の最大変位(ばねが A 縮んだ最初のとき)から単振動の中心(ばねが自然長のとき)までの時刻だから、周期の4分の1になることがわかる。した

がって、周期の公式 $T = \frac{2\pi}{\omega}$ に代入して求めると、 $\frac{T}{4} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{mM}{k(m+M)}}$ のときに、物体A、Bはばねから離れる。

問6 ばねから離れるとき(単振動の中心のとき)は、速度最大である。よって、単振動の速度の公式

$v = A\omega \cos(\omega t + \delta)$ より、物体Aから見た物体Bの速度は $A\omega = A\sqrt{\frac{k(m+M)}{mM}}$ になる。床から見た物体A、Bの

速度を v_A 、 v_B とすると、運動量保存の法則より、 $0 = Mv_A + mv_B$ 、また、物体Aから見た物体Bの速度は

$v_B - v_A = A\sqrt{\frac{k(m+M)}{mM}}$ であるので、物体Aの速度は $v_A = -A\sqrt{\frac{km}{M(m+M)}}$ 、物体Bの速度は

$v_B = A\sqrt{\frac{kM}{m(m+M)}}$

問7 運動方程式は、物体Aが $M\alpha_A = -kA$ 、物体Bが $m\alpha_B = +kA$ である。

加速度は、物体Aが $\alpha_A = -\frac{kA}{M}$ 、物体Bが $\alpha_B = +\frac{kA}{m}$ である。

問8 運動方程式は、物体Aが $M\alpha_A = -k\{L - (x_B - x_A)\}$ 、物体Bが $m\alpha_B = +k\{L - (x_B - x_A)\}$

加速度は、物体 A が $a_A = -\frac{k\{L-(x_B-x_A)\}}{M}$ 、物体 B が $a_B = +\frac{k\{L-(x_B-x_A)\}}{m}$

問9 重心の加速度は、 $a_G = \frac{Ma_A + ma_B}{M+m}$ より、問 8 を代入すると $a_G = 0$ となり、加速度は常にゼロであることが分

かる。また、重心の最初の速度はゼロだったから、重心の位置は常にゼロになり、そのまま動かないことがわかる！（問題を解くヒントとして、問題文章中に「重心が動かない」と書かれているが、この説明は無くても問題が解けることに注意！）

■ 解法の糸口は「重心位置が動かない」こと。これを使って関係式をいくつか求めてみよう。

重心の公式より、重心は、 $x_G = \frac{Mx_A + mx_B}{M+m} = \frac{M \cdot 0 + m \cdot (L-A)}{M+m} = \frac{m(L-A)}{M+m} \dots \textcircled{1}$ が成立する。よって、

$(M+m)x_G = Mx_A + mx_B = m(L-A)$ より、 $x_B = L-A - \frac{Mx_A}{m}$ である。

■ 物体 A について考える。これを A の運動方程式に代入して、 $Ma_A = -k\left\{L - \left(L-A - \frac{Mx_A}{m} - x_A\right)\right\}$ に

なる。これを整理して加速度を求めると、物体 A の加速度が $a_A = -k\left(\frac{M+m}{Mm}\right)\left(x_A + \frac{mA}{(M+m)}\right)$ であることがわ

かる。この式から、物体 A の運動は、「加速度 a_A が、中心 $-\frac{mA}{M+m}$ からのずれ $\left(x_A + \frac{mA}{(M+m)}\right)$ に比例して

いいる」運動である。よって、この運動は単振動になり、中心が $-\frac{mA}{M+m}$ 、角振動数 $\omega = \sqrt{\frac{k(M+m)}{Mm}}$ 、周期が

$T = 2\pi\sqrt{\frac{Mm}{k(M+m)}}$ 、振幅が $\frac{mA}{M+m}$ である。また、最初、物体 A は静止しており、その後 x 軸負に動くから、初

期位相は $\frac{\pi}{2}$ になるので t 秒の物体 A の位置は $x_A = \frac{mA}{M+m} \sin\left(\sqrt{\frac{k(M+m)}{Mm}} \cdot t + \frac{\pi}{2}\right) - \frac{mA}{M+m}$ だから、

$x_A = \frac{mA}{M+m} \cos\left(\sqrt{\frac{k(M+m)}{Mm}} \cdot t\right) - \frac{mA}{M+m} \dots \textcircled{2}$ である。

■ 物体 B について考える。物体 A と同様に、 $x_A = \frac{m(L-A) - mx_B}{M}$ だから、B の運動方程式に代入し、

$ma_B = +k\left\{L - \left(x_B - \frac{m(L-A) - mx_B}{M}\right)\right\}$ より、 $a_B = -\frac{k(M+m)}{Mm}\left\{x_B - \left(L - \frac{mA}{(M+m)}\right)\right\}$ になる。よって、中心

$\left(L - \frac{mA}{(M+m)}\right)$ からのずれに比例した加速度となっている。

よって、この運動は、角振動数 $\omega = \sqrt{\frac{k(M+m)}{Mm}}$ 、周期 $T = 2\pi\sqrt{\frac{Mm}{k(M+m)}}$ 振幅 $\frac{MA}{M+m}$ の単振動である。物

体 B が最初は $L-A$ で静止し、その後、 x 軸正に動くので 初期位相は $-\frac{\pi}{2}$ より、 t 秒での B の位置は

$x_B = \frac{MA}{M+m} \sin\left(\sqrt{\frac{k(M+m)}{Mm}} \cdot t - \frac{\pi}{2}\right) + L - \frac{mA}{M+m}$ より、 $x_B = -\frac{MA}{M+m} \cos\left(\sqrt{\frac{k(M+m)}{Mm}} \cdot t\right) + L - \frac{mA}{M+m} \dots \textcircled{3}$

である。

[参考] Aから見たBの運動は、 $X = x_B - x_A = -A \cos \sqrt{\frac{k(M+m)}{Mm}} \cdot t + L$ になるので、問4で求めた結果と一致している(当然です!)。

■ 物体A、Bの速度を計算してみよう。(速度は位置 x を時間 t で微分すれば求められる)

問9の②式を微分して、物体Aの速度は $v_A = -A \sqrt{\frac{km}{M(M+m)}} \sin \left(\sqrt{\frac{k(M+m)}{Mm}} \cdot t \right) \cdots \textcircled{4}$ 、また、③式を微分

して、物体Bの速度は $v_B = A \sqrt{\frac{kM}{m(M+m)}} \sin \left(\sqrt{\frac{k(M+m)}{Mm}} \cdot t \right) \cdots \textcircled{5}$ である。

[参考] 運動量保存の法則、力学的エネルギー保存の法則を使って解いた問6の結果と一致している(当然です!)。

■ 運動量保存法則について、成立・不成立かを調べてみよう。

t 秒のとき、 $Mv_A + mv_B = -MA \sqrt{\frac{km}{M(M+m)}} \sin \left(\sqrt{\frac{k(M+m)}{Mm}} \cdot t \right) + mA \sqrt{\frac{kM}{m(M+m)}} \sin \left(\sqrt{\frac{k(M+m)}{Mm}} \cdot t \right)$ だから

$Mv_A + mv_B = -A \sqrt{\frac{kMm}{M+m}} \sin \left(\sqrt{\frac{k(M+m)}{Mm}} \cdot t \right) + A \sqrt{\frac{kMm}{M+m}} \sin \left(\sqrt{\frac{k(M+m)}{Mm}} \cdot t \right) = 0$ である。よって、最初、両方

静止していたので最初の運動量の和はゼロであり、また t 秒のときも運動量の和はゼロだから、

「運動量保存の法則は成立している」ことになる。

■ 力学的エネルギー保存の法則の成立・不成立かを調べてみよう。

時刻 t 秒のときのばねの伸びは $x_B - x_A - L$ である。この式に、問9の②、③式を代入して整理すると、

$x_B - x_A - L = -\frac{MA}{M+m} \cos \left(\sqrt{\frac{k(M+m)}{Mm}} \cdot t \right) - \frac{mA}{M+m} \cos \left(\sqrt{\frac{k(M+m)}{Mm}} \cdot t \right) = -A \cos \left(\sqrt{\frac{k(M+m)}{Mm}} \cdot t \right)$ である。し

たがって、ばねのエネルギーは $U = \frac{1}{2} k \left(A \cos \sqrt{\frac{k(M+m)}{Mm}} \cdot t \right)^2 = \frac{1}{2} k A^2 \cos^2 \sqrt{\frac{k(M+m)}{Mm}} \cdot t$ である。

一方、そのときの運動エネルギーの合計は、問9の④、⑤の2式を代入して $K = \frac{1}{2} M v_A^2 + \frac{1}{2} m v_B^2$ だから、

$K = \frac{1}{2} M \left\{ A \sqrt{\frac{km}{M(M+m)}} \sin \left(\sqrt{\frac{k(M+m)}{Mm}} \cdot t \right) \right\}^2 + \frac{1}{2} m \left\{ A \sqrt{\frac{kM}{m(M+m)}} \sin \left(\sqrt{\frac{k(M+m)}{Mm}} \cdot t \right) \right\}^2$ である。これを整

理して $K = \frac{1}{2} M \left\{ \frac{Ak^2 m}{M(M+m)} \sin^2 \left(\sqrt{\frac{k(M+m)}{Mm}} \cdot t \right) \right\} + \frac{1}{2} m \left\{ \frac{Ak^2 M}{m(M+m)} \sin^2 \left(\sqrt{\frac{k(M+m)}{Mm}} \cdot t \right) \right\}$ より、運動エネル

ギーの合計は $K = \frac{1}{2} A^2 k \sin^2 \left(\sqrt{\frac{k(M+m)}{Mm}} \cdot t \right)$ である。よって、ばねのエネルギーと運動エネルギーの和(力学

的エネルギーの合計)は、 $U + K = \frac{1}{2} k A^2$ になる。これは、時刻 t に係らず常に一定の値である。

よって、「力学的エネルギー保存の法則も成立している」ことが分かる。

[参考] 運動量保存の法則、力学的エネルギー保存の法則を使って解いた問6の結果と一致している(当然です!)。