

大学入試問題研究 第61回 2002年度 大阪大学 ② 弦の振動

バイオリンから出る音について考える。以下の問題に答えよ。

問1 音波とはどういう波か簡潔に説明しなさい。

問2 バイオリンのA弦は440Hzに調律されなければならない。いまA弦を鳴らしたところ、音程が少し狂っており、やや低めの音が出た。このA弦の基本音(基本振動による音)と440Hzのおんさを同時に鳴らすと0.50秒の周期でうなりが聞こえた。このA弦から出る音の振動数はいくらであるか。

バイオリンの音は、弦を伝わる波が弦の両端で反射を繰り返す、干渉あつて出来る定常波によって引き起こされる。弦を伝わる波の速さを v_0 とする。

問3 バイオリンの弦の震動する部分の長さを L とするとき、弦の基本音の振動数 f を v_0 を使って表しなさい。

バイオリンの弦を調律するために、弦の張り具合を調節する。問3より、弦の振動数は波の伝わる速さによって決まる。そこで、弦の張力と弦を伝わる波の速さとの関係を調べてみよう。

図1のように、弦を力 F で引っ張り、更に一端で衝撃的な上下運動を加えると、パルス(弦の小さな山)が x 軸正方向に速さ v で伝わってゆく。この弦の静止時の質量線密度(単位長さ当たりの質量)は ρ である。

パルスの右端部分は、角度 θ で立ち上がる。(図1の拡大図) 時刻 T から $T+\Delta T$ の間に、立ち上がりの位置は速さ v で p から Q に移動する。

時刻 T に位置 P と Q の間にあつた減の小部分を K と呼ぶ。 K の左端は時刻 T に y 軸正の方向に動き始める。図2に示すように、その後、 K の各点は左から順に y 軸正方向に動き始め、時刻 $T+\Delta T$ の間に、立ち上がりの位置は速さ v で時刻 $T+\Delta T$ には、 K の右端が動き始める。

問4 時刻 T まで K は PQ の位置に静止しており、その長さは $\Delta L = v\Delta T$ である。時刻 $T+\Delta T$ には K は $P'Q$ の位置に達し、速さ w で y 軸方向に動いている。 K の質量 ΔM は、 $P'Q$ に移動してきたときも PQ にあつたときと同じである。 ΔM を ρ 、 v 、 ΔT で表しなさい。また、時刻 $T+\Delta T$ での K の運動量の y 成分はいくらになるか、 w を含んだ式で表しなさい。

問5 K の運動量の変化は力積によって引き起こされる。張力は弦に沿っており、その大きさは常に F である。時刻 T から $T+\Delta T$ の間に、張力が K に与えた力積の y 成分はいくらか。 F を含んだ式で表しなさい。

問6 長さ PP' と PQ を比較すると、 $w = v \tan \theta$ の関係を得る。この関係を使い、 v を ρ 、 F 、 θ で表しなさい。計算の過程も示しなさい。

問7 弦を伝わる波の速さ v_0 は、 θ が十分に小さいときのパルスの移動する速さ v と同じである。このとき、 $\cos \theta = 1$ 、 $\sin \theta = \theta$ と近似できる。このことを問3と問6の答えに適用して、弦の基本音の振動数 f を ρ 、 F 、 L で表しなさい。

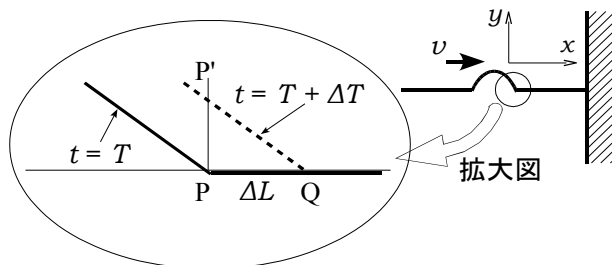


図1

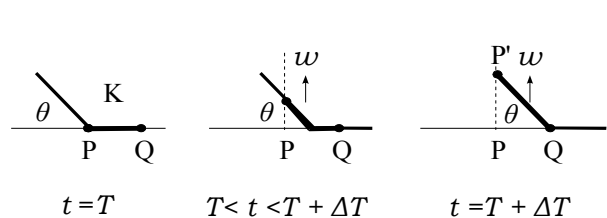


図2

問1 空気の粗密波(密度の変化が伝わる波、圧力変化が伝わる波)で、縦波(波の振動方向が進行方向に平行な波)に分類される。

問2 「**2つの音の振動数の差がうなりの振動数である**」を使えばよい。うなりの周期が0.5秒だから、うなりの振動数は2.0 Hzである。よって、 $440\text{Hz} \pm 2.0\text{Hz}$ のどちらかである。この場合、少し低い音とあるので、438 Hzがこの弦の振動数である。

問3 「**基本振動では弦の長さが半波長に相当する**(2倍振動のときは弦の長さが1波長に相当する)」を使えばよい。したがって、このとき弦に伝わる波の波長は $2L$ である。「**振動数と波長の積が波の速さ**」であるので、 $v_0 = f \times 2L$ であるので、 $f = \frac{v_0}{2L}$ である。

問4 PQ の長さが $v \Delta T$ であるので、その弦の部分の質量は $\rho v \Delta T$ である。また、 $t = T + \Delta T$ のときの K の運動量($p = mv$)は、上向きに $p = \rho v \Delta T \times w = \rho v w \Delta T$ である。

問5 K の部分を引く力は F であるので、 y 方向成分は $F \sin \theta$ (x 方向成分は $-F \cos \theta$) である。よって、 ΔT の間に受ける力積は $F \sin \theta \cdot \Delta T$ である。

問6 「運動量の変化は力積に等しい」ことから $\rho v w \Delta T = F \sin \theta \cdot \Delta T$ が成立し、これを整理すると、 $\rho v w = F \sin \theta$ である。また、 $w = v \tan \theta$ の関係が成立するので、 $\rho v^2 \tan \theta = F \sin \theta$ になり、弦の上を波が進む速さは $v = \sqrt{\frac{F \cos \theta}{\rho}}$ になる。

問7 θ が十分に小さいとき、 $\cos \theta = 1$ としてよい(問題文中)ので、弦を伝わる波の速さは $v = \sqrt{\frac{F}{\rho}}$ である。これが問3の $f = \frac{v_0}{2L}$ の v_0 に相当するので、この弦を伝わる波の振動数は $f = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{F}{\rho}}$ とかけることが分かる。

※ 「弦を伝わる波の速さの公式がなんと上手く導ける!」と感じる問題である。なお、弦を伝わる波の速度の公式を導くうまい方法は他にもある(神戸大学の過去問)。この問題は、問題文の説明どおりに解いてゆけば簡単なので、満点を確保したい問題である。