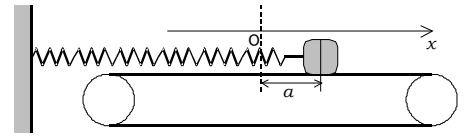


入試問題研究 第65回 1999年 姫路工大 ① 単振動

ばね定数 k [N/m] で自然長が l [m] の軽いばねがあり、その一端を壁に固定し他端には質量 m [kg] の小物体をつないだ。図のように小物体は図中の矢印の方向に一定の速さ V [m/s] で動く事が可能なベルトの上に乗っており、図の紙面内で水平方向のみに運動する。ベルトと小物体の間の静止摩擦係数と動摩擦係数をそれぞれ μ 、 μ' (ただし、 $\mu > \mu'$)、重力加速度の大きさを g として以下の問に答えなさい。



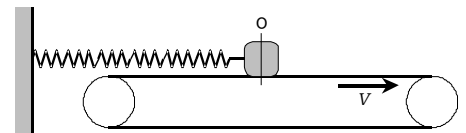
問1. ベルトが静止した状態で、小物体を自然長の位置Oから右に a [m] ($a > 0$) だけ伸ばして放したところ、小物体は左に運動を始めたあと、左にある距離進んで止まってしまった。

(1) 静止する位置を求めなさい。

(2) このような運動になるための条件を求めなさい。

(3) 小物体が運動を始めてから停止するまでにかかった時間はいくらになるか。

問2. ベルトが一定の速さ V [m/s] で動いている状態で、Oの位置で滑っている小物体をそっと放したところ小物体は単振動を始めた。ただし、 V は十分大きく、常に小物体の速さより速くなっており、小物体はベルト上を滑った状態にある。



(1) 小物体の単振動の周期と振幅を求めなさい。

(2) 1周期の振動のうちで、右向きに運動している間に動摩擦力が小物体にする仕事はいくらになるか。また、左向きに運動している間についても動摩擦力が小物体にする仕事も求めなさい。

(3) 小物体とベルトの間に動摩擦力が常に働いているのに単振動の振幅が一定の運動を取りつづける理由を述べなさい。

入試問題研究 第65回 1999年 姫路工大 ① 単振動 (解答・解説)

問1. (1) 小物体が左に運動を始めたあと、左にある距離 x [m] 進んで止まったとする。摩擦で失われる力学的エネルギーは $W = \mu' mg \cdot x$ だから、ばねに蓄えられている力学的エネルギーの差に等しいので、

$$\mu' mg \cdot x = \frac{1}{2} ka^2 - \frac{1}{2} k(a-x)^2 \text{ が成立する。したがって、} \{kx - 2(ak - \mu' mg)\}x = 0 \text{ だから、} x = 0、$$

$$x = \frac{2(ak - \mu' mg)}{k} \text{ が求まる。したがって、滑ったあと静止する位置は } x = \frac{2(ak - \mu' mg)}{k} \text{ である。したがって、}$$

$$\text{O点からの距離は } a - \frac{2(ak - \mu' mg)}{k} = \frac{2\mu' mg - ak}{k} \dots(1) \text{ である。}$$

(2) この位置では速度がゼロになっているので、左向きを正としたときのばねの力は $f = k(a-x)$ 、ベルトと物体の間の最大摩擦力の大きさ μmg より、 $\mu mg > |k(a-x)|$ であればよい。したがって、

$$\mu mg > \left| k \left(a - \frac{2(ak - \mu' mg)}{k} \right) \right| \text{ だから、} \mu mg > |2\mu' mg - ak| \text{ より、} -\mu mg < 2\mu' mg - ak < \mu mg \text{ だから、手を離す位置は}$$

$$\frac{(-\mu + 2\mu')mg}{k} < a < \frac{(\mu + 2\mu')mg}{k} \dots(2) \text{ の範囲であればよい。}$$

別解 (1) この物体の運動(単振動)は、釣り合いの位置が中心だから、 $kx_0 = \mu' mg$ の位置だ。したがって、

$$x_0 = \frac{\mu' mg}{k} \text{ 右に伸びている位置が単振動の中心だ。したがって、手を離れた位置が } a \text{ だから、振幅は}$$

$$a - x_0 = a - \frac{\mu' mg}{k} = \frac{ak - \mu' mg}{k} \text{ になる。したがって、止まる位置(反対側の最大変位の位置)は}$$

$$a - 2(a - x_0) = a - 2 \left(\frac{ak - \mu' mg}{k} \right) = \frac{2\mu' mg - ak}{k} \text{ である。}$$

(2) ここでのばねの力が物体の最大摩擦力より小さければ静止したままになるから、

$$f = \left| k \left(\frac{-ak + 2\mu' mg}{k} \right) \right| = |-ak + 2\mu' mg| < \mu mg \text{ より、} -\mu mg < -ak + 2\mu' mg < \mu mg \text{ であるから、手を離す位置は}$$

$$\frac{(-\mu + 2\mu')mg}{k} < a < \frac{(\mu + 2\mu')mg}{k} \dots(2) \text{ の範囲であればよい。}$$

(3) この物体の運動はばねの単振動だから、周期は $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$ になる。したがって、この物体が静止するま

での時間は単振動の半周期(最大変位から最大変位までの時間)であるので、 $\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \dots(3)$ である。

問2. (1) 物体には常に右向きに動摩擦力 $\mu' mg$ がかかっている。したがって、この物体の単振動の中心は

$$x_0 = \frac{\mu' mg}{k}、\text{周期は } T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \text{ の単振動になる。したがって、手を離れた位置が速度ゼロだから、最大変位}$$

の位置に相当するので、振幅は $\frac{\mu' mg}{k}$ である。

(2) 摩擦力の向きは動く向きとは逆向きだから、右向きに動いている半周期では、摩擦力がする仕事は

$$+\mu' mg \times \frac{2\mu' mg}{k} = +\frac{2(\mu' mg)^2}{k}、\text{左向きに動いている半周期では、摩擦力がする仕事は}$$

$$-\mu' mg \times \frac{2\mu' mg}{k} = -\frac{2(\mu' mg)^2}{k} \text{ である。}$$

(3) 右に動いている半周期にベルトから仕事を受け取ったエネルギーを、左向きに動いているときに消費することを繰り返すので、摩擦が働いていても1周期繰り返したときの物体の持つエネルギーは変わらないから、無限に単振動が続くことになる。