

入試問題研究 第66回 2000年 東北大学(前) ② 気体の変化

ヘリウム気球を地表から上昇させる。気球の生地は断熱性で、ヘリウムガスは透過せず、厚さは無視できる。また、生地は伸び縮みせず、ヘリウムガスの注入により折りたたまれた状態から膨らみ、気球の内部と外部の気体の圧力は等しいとする。ヘリウムを除いた気球の全質量を M とし、ヘリウムガスは標準状態での密度が D_0 の理想気体とする。大気は無風で、地表での圧力が 1 気圧、温度が T_1 、密度が d_1 とする。標準状態の温度を T_0 、標準状態における 1 モルの理想気体の体積を V_0 、気体定数を R 、重力加速度を g とし、次の各問いに答えなさい。ただし、結果だけでなく考え方、および、計算の過程も記入しなさい。なお、必要なら次に与える数値、および、物理定数を用いなさい。

$$T_0 = 2.73 \times 10^2 \text{ K}, V_0 = 2.24 \times 10^{-2} \text{ m}^3, T_1 = 2.88 \times 10^2 \text{ K},$$

$$d_1 = 1.22 \text{ kg/m}^3, D_0 = 1.79 \times 10^{-1} \text{ kg/m}^3, R = 8.31 \text{ J/mol} \cdot \text{K},$$

- (1) 地表で、気球にヘリウムガスを n モル注入した。ヘリウムガスの温度は T_1 とする。

(a) このとき、気球を係留するのに必要な力の大きさを F を、与えられた記号の中から必要なものを用いて表しなさい。

(b) このとき、ヘリウム分子の平均速度(2乗平均速度) $\sqrt{v^2}$ を、与えられた記号の中から必要なものを用いて表しなさい。また、その値を有効数字1桁で求めなさい。

- (2) 問(1)の気球の係留を解いて上昇させたところ、次第に加速した。その後、一定の速度になった。

(a) 一定の速度になった理由を 30 字から 50 字程度で述べなさい。

(b) 気球の真下で地表から高さが 10m の位置に、振動数 f_0 の音源を設置した。気球にも同じ音源を取り付けてある。これら両音源から、気球の真下の地表にある測定装置に向けて音波を発射したところ、うなりが観測された。その振動数は Δf であった。音速を a とし、このときの気球の上昇速度の大きさ u を、与えられた記号の中から必要なものを用いて表しなさい。さらに、 $f_0 = 440 \text{ Hz}$ 、 $\Delta f = 5.00 \text{ Hz}$ のとき、 $a = 340 \text{ m/s}$ とし、 u の値を有効数字2桁で求めなさい。

- (3) 問い(2)の気球がさらに上昇しつづけると、大気圧の低下により気球が膨らみ、ある高度でヘリウムガスの温度が T_2 に低下した。この高度に達するまでにヘリウムガスが外部にした仕事 W を、与えられた記号の中から必要なものを用いて表しなさい。(実際、気球が大きく上昇が速い場合、外部からの熱の出入りは無視できるほど小さい)。

入試問題研究 第66回 2000年 東北大学(前) ② 気体の変化

ヘリウム気球を地表から上昇させる。気球の生地は断熱性で、ヘリウムガスは透過せず、厚さは無視できる。また、生地は伸び縮みせず、ヘリウムガスの注入により折りたたまれた状態から膨らみ、気球の内部と外部の気体の圧力は等しいとする。ヘリウムを除いた気球の全質量を M とし、ヘリウムガスは標準状態での密度が D_0 の理想気体とする。大気は無風で、地表での圧力が 1 気圧、温度が T_1 、密度が d_1 とする。標準状態の温度を T_0 、標準状態における 1 モルの理想気体の体積を V_0 、気体定数を R 、重力加速度を g とし、次の各問いに答えなさい。ただし、結果だけでなく考え方、および、計算の過程も記入しなさい。なお、必要なら次に与える数値、および、物理定数を用いなさい。

$$T_0 = 2.73 \times 10^2 \text{ K}, V_0 = 2.24 \times 10^{-2} \text{ m}^3, T_1 = 2.88 \times 10^2 \text{ K},$$

$$d_1 = 1.22 \text{ kg/m}^3, D_0 = 1.79 \times 10^{-1} \text{ kg/m}^3, R = 8.31 \text{ J/mol} \cdot \text{K},$$

- (1) 地表で、気球にヘリウムガスを n モル注入した。ヘリウムガスの温度は T_1 とする。

- (a) 温度が T_1 のヘリウムを n モル入れた気球の体積を V_1 とする。

シャルルの法則 $\frac{V_1}{T_1} = \frac{nV_0}{T_0}$ を適用すると、気球の体積は $V_1 = \frac{nV_0T_1}{T_0} \dots \textcircled{1}$ になる。

気球に働く力のつりあいより、 $F + (M + D_0nV_0)g = d_1V_1g \dots \textcircled{2}$ が成立する。

①、②より、 $F = \frac{nV_0(d_1T_1 - D_0T_0)g}{T_0} - Mg$

- (b) $\frac{1}{2} m_{\text{He}} \left(\sqrt{v^2} \right)^2 = \frac{3}{2} \frac{R}{N_A} T_1 \dots \textcircled{3}$ 、標準状態におけるヘリウムの質量は $D_0V_0 = m_{\text{He}}N_A \dots \textcircled{4}$ だから、

$$\sqrt{v^2} = \sqrt{\frac{3RT_1}{m_{\text{He}}N_A}} = \sqrt{\frac{3RT_1}{D_0V_0}} \text{ より、このときのヘリウムの平均速度は } \sqrt{v^2} = \sqrt{\frac{3RT_1}{D_0V_0}} = (\text{数値計算略})$$

- (2) 問(1)の気球の係留を解いて上昇させたところ、次第に加速した。その後、一定の速度になった。

- (a) 気球の浮力と重力と気球が上昇するときに受ける空気抵抗の3つの力が関係する。空気抵抗は気球の上昇速度に比例する。最初、気球の速度が小さいと空気抵抗が小さく、3つの力の合力は上向きが強い。そのため気球は加速しながら上昇する。上昇速度が増すにつれ空気抵抗が大きくなる。そのため、3つの力がつりあうまで加速すると、それ以上の加速できなくなり、一定速度になる。以上を30から50字にまとめればよい。

「気球の浮力と重力、空気抵抗の3つの力がつりあい、それ以上の加速できなくなり一定速度で上昇する。」

- (b) 気球の真下で地表から高さが10mの位置に、振動数 f_0 の音源を設置した。気球の下で聞く音の振動数は

ドップラー効果により、 $f' = f_0 \frac{a}{a+u}$ になる。よって、うなりの振動数は $\Delta f = f_0 - f' = f_0 - f_0 \frac{a}{a+u} = \frac{f_0 u}{a+u}$ である。

このとき、 $f_0 = 440 \text{ Hz}$ 、 $\Delta f = 5.00 \text{ Hz}$ 、 $a = 340 \text{ m/s}$ であるので、代入して $u = \frac{a \Delta f}{f_0 - \Delta f} = \frac{340 \times 5}{440 - 5} = 3.90 \dots$ になる。

よって、このときの気球の上昇速度は $3.9 [\text{m/s}]$ である。

- (3) 問い(2)の気球がさらに上昇しつづけると、大気圧の低下により気球が膨らみ、ある高度でヘリウムガスの温度が T_2 に低下した。気球が断熱容器と考えられるので、この過程は断熱変化になる。この高度に達するまでにヘリウムガスが外部にした仕事 W は気体が失った内部エネルギーに等しくなる(熱力学第一法則)。したがって、

$$\Delta U = W = \frac{3}{2} nR(T_1 - T_2) \text{ である。}$$