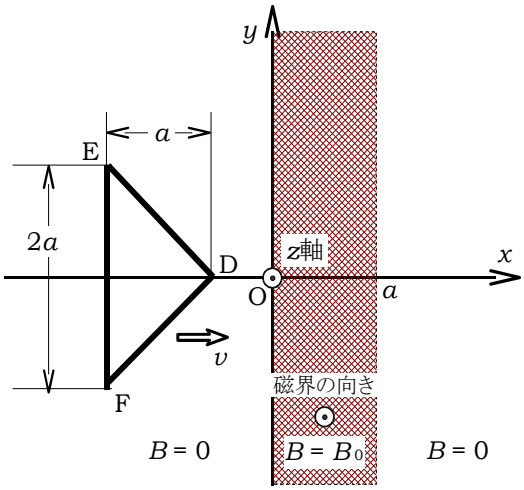
入試問題研究 第68回 2003年 東京工業大学 ② 電磁誘導（一部改）

図のように、$+z$ 軸方向を向いている磁束密度の大きさ B が xy 平面で $0 \leq x \leq a$ では、$B=B_0$（定数）、それ以外では $B=0$ となっている空間がある。この空間に底辺の長さが $2a$ 、高さが a であるような直角二等辺三角形DEF（頂点Dが直角）の1回巻きコイルLを、そのコイル面が xy 平面と一致するように置く。そして図のように線分EFの中点から頂点Dに向かう方向が x 軸と一致するようにして、$+x$ 方向に一定の速さ v で移動させる。なお、コイルの抵抗を R とし、導線の太さは無視する。設問(a) ～ (d) では、コイルの自己インダクタンスは無視するものとする。また、時刻 $t=0$ では頂点Dが $x=0$ にある。



(a) 下記の枠内に入る式を答えよ。

コイルLを貫く磁束 Φ は、$+z$ 方向を正として $0<t\leq\dfrac{a}{v}$ では、$\Phi_1(t)=$ ① となり、$\dfrac{a}{v}<t\leq\dfrac{2a}{v}$ では、$\Phi_1(t)=$ ② となる。$0<t\leq\dfrac{a}{v}$ では、時刻 t から微小時間 Δt だけ経過して、$t+\Delta t$ になったときの磁束 Φ_1 の変化量 $\Delta\Phi_1$ は、$\Delta\Phi_1=$ ③ となる。このとき、Δt の項に比較して $(\Delta t)^2$ の項が小さいとして無視すれば、コイルに誘起される誘導起電力 $V_1(t)$ は、D→E→F→D に沿って発生する起電力を正として $V_1(t)=$ ④ と表すことができる。同様にして、$\dfrac{a}{v}<t\leq\dfrac{2a}{v}$ での誘導起電力は、$V_2(t)=$ ⑤ となる。

(b) $0<t\leq\dfrac{2a}{v}$ でコイルLに流れる電流 I の変化のグラフを描きなさい。この間での電流 I の大きさの最大値 I_m を求めなさい。ただし、D→E→F→D に沿って流れる電流の向きを正としなさい。

(c) $0<t\leq\dfrac{a}{v}$ でコイルLがジュール熱として消費している電力 P を時刻 t の関数として表しなさい。

(d) コイルLを一定の速さ v で移動させるために外から加えている力 F を、$0<t\leq\dfrac{a}{v}$ で時刻 t の関数として表しなさい。ただし、$+x$ 方向を正としてグラフで表しなさい。

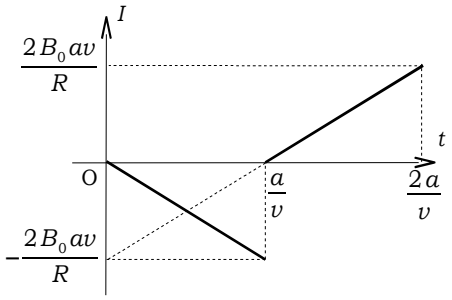
(e) 次に、コイルLの自己インダクタンスが無視できない場合を考える。$0<t\leq\dfrac{a}{v}$ のときの電流の大きさは、同じ時刻 t で比較した場合、上記(b)で調べた電流の大きさよりも大きくなるか、小さくなるか、あるいは変わらないかを答えなさい。また、そのように考えた理由を50字以内で説明しなさい。

入試問題研究 第68回 2003年 東京工業大学 ② 電磁誘導（解説）

(a) コイルLを貫く磁束 Φ は、$+z$ 方向を正として $0<t\leq\dfrac{a}{v}$ では、$\Phi_1(t)=B_0v^2t^2$ ･･･① となり、$\dfrac{a}{v}<t\leq\dfrac{2a}{v}$ では、$\Phi_1=B_0a^2-B_0(vt-a)^2$ ･･･② となる。

$0<t\leq\dfrac{a}{v}$ では、時刻 t から微小時間 Δt だけ経過したときの磁束の変化量 $\Delta\Phi_1$ は、$\Delta\Phi_1=B_0v^2(t+\Delta t)^2-B_0v^2t^2$ ･･･③ となる。このとき、$(\Delta t)^2$ の項をが小さいとして無視すれば、$\Delta\Phi_1=2B_0v^2t\Delta t$ になる。電磁誘導の法則 $V=(-)N\cdot\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ より、コイルに誘起される誘導起電力はD→E→F→D に沿う向きを正として $V_1(t)=-2B_0v^2t$ ･･･④ と表すことができる（電流の向きはレンツの法則を適用する）。同様にして、$\dfrac{a}{v}<t\leq\dfrac{2a}{v}$ でも、

$\Phi_1=B_0a^2-B_0(vt-a)^2=2B_0vat-B_0v^2t^2$ より、
$\Delta\Phi_1=2B_0v(a-vt)\Delta t$ であるから、誘導起電力は、
$V_2(t)=-2B_0v(a-vt)$ となる。



(b) オームの法則を使って電流を求めればよい。

$0<t\leq\dfrac{a}{v}$ では $I(t)=-\dfrac{2B_0v^2t}{R}$ 、$\dfrac{a}{v}<t\leq\dfrac{2a}{v}$ では $I(t)=-\dfrac{2B_0v(a-vt)}{R}$ であるから、右図。また、電流の最大値は $t=\dfrac{a}{v},\dfrac{2a}{v}$ のとき $I_m=\dfrac{2B_0av}{R}$ である。

(c) ジュール熱の電力は $P=I^2R$ より、$0<t\leq\dfrac{a}{v}$ では、$I(t)=-\dfrac{2B_0v^2t}{R}$ の電流だから、

$P=\left(\dfrac{2B_0v^2t}{R}\right)^2R$ だから、$P=\dfrac{4B_0^2v^4t^2}{R}$ である。

(d) $0<t\leq\dfrac{a}{v}$ では電線が磁界の中にあるのは右側の2本（それぞれ長さ $\sqrt{2}vt$ ）である。1本の電線が受ける力の大きさは $f=IBl\sin\theta$ の公式より $f=\dfrac{2B_0v^2t}{R}\cdot B_0\cdot\sqrt{2}vt\cdot1$ である。それぞれ45度の向きを向くので合力を求めると $-\dfrac{4B_0^2v^3t^2}{R}$ （x軸負向き）である。よって、コイルLを引く力は $\dfrac{4B_0^2v^3t^2}{R}$ （x軸正の向き）である。

［別解］「コイルLを引く力がする仕事」＝「ジュール熱の電力」から求めることが出来る。
微小時間 Δt において $\dfrac{4B_0^2v^4t^2}{R}\cdot\Delta t=F\cdot v\Delta t$ だから、力は $F=\dfrac{4B_0^2v^3t^2}{R}$ である。

(e) 「電流は小さくなる」。
（自己インダクタンスが無視できない場合）コイルを貫く外部磁束の変化で生じた誘導電流の増加が、コイルの自己誘導起電力の発生で抑えられるから。