

入試問題研究 第70回 1999年度 北海道大学 ① 衝突・単振動

次の文章の空欄に適当な数式を入れなさい。

問1. 図1のように、ばね、物体A、物体Bが水平でなめらかな床の上に置かれている。ばねの左端は壁に固定され、物体Aはばねに直接つながられている。物体Bは物体Aに接しているが固定はされていない。図のように右向きに x 軸をとり、自然長のときのばねの右端を原点 $x = 0$ とする。またばね定数を k とし、ばねの質量は無視できるものとする。物体A、Bの質量はともに m である。

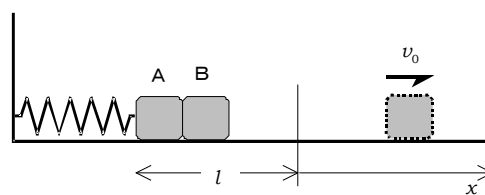


図1

物体Aと物体Bが接した状態でばねを左に距離 l だけ縮ませ、静かに手を離すと物体Bは物体Aに接したまま右向きに運動を始める。物体Bがどこで物体Aから離れるかを考察しよう。物体Bが物体Aから受ける力は右に移動するにつれて減少し、ばねが自然長になったときゼロとなる。このとき物体Bの速度 v_0 は ① となる。またその時刻は手を離れた時刻を $t = 0$ とすれば、② である。ばねにつながれた物体Aの速度はこのとき最大となり、その後減少し、ばねの右端の x 座標が ③ に達したとき、ゼロになる。以上の考察より、物体Bはばねの右端の x 座標が ④ で物体Aから離れ、速度 v_0 のまま右向きに運動し続けることがわかる。

問2. 次に、図2に示すように、床の上を運動し続ける物体Bに箱をかぶせる。物体Bは箱の中で左右に衝突を繰り返す。このとき、物体Bと箱の運動について考察しよう。ただし、箱の質量を M 、箱と物体Bのはねかえり係数を e とする。また、衝突によって箱が傾くことはないものとする。

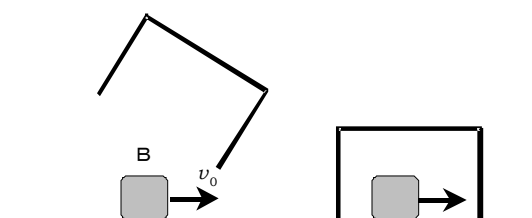


図2

衝突前の物体Bおよび箱の速度をそれぞれ v_0 および 0 とする。1回目の衝突後の物体Bおよび箱の速度をそれぞれ v_1 および V_1 とする。はねかえり係数 e を v_0, v_1, V_1 で表すと ⑤ となる。 v_1, V_1 を v_0, m, M, e で表すと $v_1 =$ ⑥、 $V_1 =$ ⑦ となる。

また2回目の衝突後の物体Bおよび箱の速度を、それぞれ v_2 および V_2 とし、はねかえり係数 e を v_1, V_1, v_2, V_2 で表すと ⑧ となる。よって、 e, v_0, v_2, V_2 の関係は $e^2 =$ ⑨ と表される。同様に n 回目の衝突後の物体Bおよび箱の速度を、それぞれ v_n および V_n とすると、 e, v_0, v_n, V_n の関係は $e^n = (-1)^n \times$ ⑩ となる。したがって、 $e < 1$ であるから、 n が大きくなるにつれて物体と箱の速度の大きさは次第に近づいていくことが分かる。

入試問題研究 第70回 1999年度 北海道大学 ① 衝突・単振動

基本となる知識

力学的エネルギー保存の法則、ばねの単振動、単振動の周期の公式、

衝突の計算(運動量保存の法則とはねかえり係数)、漸化式(数学)

復習事項

ばねの単振動、円運動

解説

問1. 力学的エネルギー保存の法則より、 $\frac{1}{2}kl^2 = \frac{1}{2}(m+m)v_0^2$ だから、物体Bの速度は $v_0 = \sqrt{\frac{kl^2}{2m}}$ …(1) であ

る。離れるまでは物体の質量が $M+m$ であるから、この物体の運動は周期 $T = 2\pi\sqrt{\frac{2m}{k}}$ の単振動である。

離れるまでの時間は4分の1周期に相当するので、離れる時の時刻は $t = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{2m}{k}}$ …(2) である。

物体Aの力学的エネルギー保存の法則を適用して、 $\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}kx^2$ だから、 $x = v_0\sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{\sqrt{2}l}{2}$ …(3) であ

る。物体Bが離れる位置は単振動の中心 $x=0$ …(5) の位置である。

問2. 1回目の衝突前後で はねかえり係数より $e = -\frac{v_1 - V_1}{v_0}$ …(5)、運動量保存の法則より

$mv_0 = mv_1 + MV_1$ 、だから、 $ev_0 = -v_1 + V_1$ である。それぞれの速度を求めると、 $v_1 = \frac{(m-eM)v_0}{m+M}$ …(6)、

$V_1 = \frac{(1+e)mv_0}{m+M}$ …(7) である。

同様に2回目の前後で、はねかえり係数から $e = -\frac{v_2 - V_2}{v_1 - V_1}$ …(8)、運動量保存の法則から

$mv_0 = mv_2 + MV_2$ であるので、(5)(8)より $e^2 = (-1)^2 \times \frac{v_2 - V_2}{v_0}$ …(9) になる。

同様に n 回目の衝突前後で、 $e^n = (-1)^n \times \frac{v_n - V_n}{v_0}$ …(10) である。参考までに衝突後のそれぞれの速度を

運動量保存の法則からの $mv_0 = mv_n + MV_n$ と合わせて解くけばよい。

(10)から、 $(-1)^n e^n v_0 = v_n - V_n$ だから、 n 回目の衝突後の物体Bの速度 $v_n = \frac{m+(-e)^n M}{m+M} v_0$ 、箱の速度

$V_n = \frac{\{1 - (-e)^n\}m}{m+M} v_0$ である。

はねかえり係数 e が1未満より、衝突を繰り返すと最終的には物体B、箱ともに $v_\infty = V_\infty = \frac{m}{m+M} v_0$ の同じ速度に近づいてゆくことが分かる。