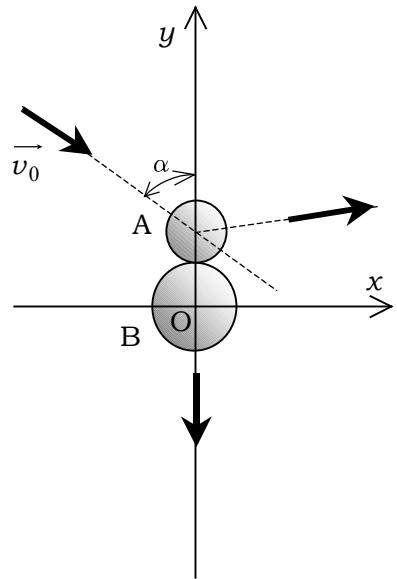


入試問題研究 第71回 2001年度 東京都立大学 ① 衝突

右図に示すように、質量 m の球 A が y 軸に対して角度 α をなす方向から速度 \vec{v}_0 で飛来し、座標の原点に静止している質量 $2m$ の球 B に y 軸上で衝突した。球 A と球 B の反発係数を e とし、衝突時における球の変形や摩擦、および、重力は無視する。 α 、 e 、 m および、 \vec{v}_0 の大きさ v_0 を用いて、以下の間に答えなさい。

(1) 衝突前の速度ベクトル \vec{v}_0 を x 方向成分と y 方向成分に分解したとき、

各速度成分の大きさ v_x 、 v_y を求めなさい。



(2) 衝突後の球 A と球 B の各運動量ベクトルを合成したベクトル \vec{p} の大きさ p 、および、この合成ベクトルの x 、 y 成分の大きさを求めなさい。

(3) 衝突後の球 A が球 B に与えた力積の大きさを求めなさい。

(4) 衝突後の球 A の運動方向は、反発係数 e の値により異なる。球 A が衝突後 x 軸に平行な方向に運動するときの e の値を求めなさい。

(5) 衝突が $e=1$ の完全弾性衝突であった場合、衝突後の球 A と球 B の各運動エネルギーを E_A 、 E_B を求めなさい。

入試問題研究 第71回 2001年度 東京都立大学 ① 衝突

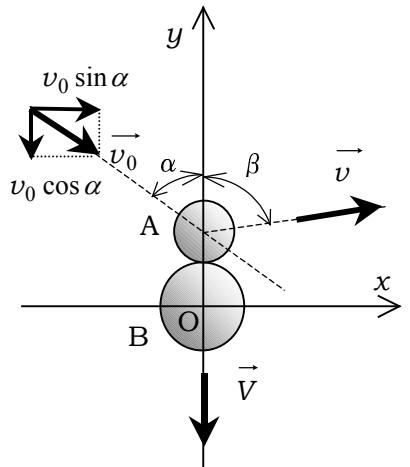
右図に示すように、質量 m の球 A が y 軸に対して角度 α をなす方向から速度 \vec{v}_0 で飛来し、座標の原点に静止している質量 $2m$ の球 B に y 軸上で衝突した。球 A と球 B の反発係数を e とし、衝突時における球の変形や摩擦、および、重力は無視する。 α 、 e 、 m および、 \vec{v}_0 の大きさ v_0 を用いて、以下の間に答えなさい。

- (1) 衝突前の速度を分解して(右図)各方向の速度成分を求める。

$$x \text{ 方向成分は } v_x = v_0 \sin \alpha$$

$$y \text{ 方向成分は } v_y = -v_0 \cos \alpha$$

- (2) 衝突時に外力が働くかない。よって、衝突前後で運動量が保存する(運動量保存の法則)から、衝突後の運動量の和(合成した運動量のベクトル \vec{p})は衝突前の運動量の和に等しい。 $\vec{p} = \vec{v}_0 + \vec{0} = \vec{v}_0$ が成立するから、 x 方向成分は $p_x = mv_x = mv_0 \sin \alpha$ 、 y 方向成分は $p_y = mv_y = -mv_0 \cos \alpha$ である。



- (3) 衝突時に働く力は y 軸方向のみだから、球 A、B が受ける力積は y 軸方向成分のみである。そのときの力積の大きさを $F\Delta t$ 、衝突後の速度が、球 A が $\vec{v} = (v \sin \beta, v \sin \beta)$ 、球 B が $\vec{V} = (0, -V)$ とする。

運動量の変化が力積に等しいので、球 Aにおいて、 x 方向: $mv \sin \beta - mv_0 \sin \alpha = 0 \cdots ①$ 、 y 方向: $mv \cos \beta - (-mv_0 \cos \alpha) = F\Delta t \cdots ②$ 、球 Bにおいて、 $(-2mV) - 0 = -F\Delta t \cdots ③$ の関係式が成立する。

参考 ①より $mv \sin \beta = mv_0 \sin \alpha$ (これは x 方向の運動量保存則) より、 $v \sin \beta = v_0 \sin \alpha \cdots ④$ 、また、

②、③式より $F\Delta t$ を消去した $mv \cos \beta - 2mV = -mv_0 \cos \alpha$ (これは y 方向の運動量保存則) より、
 $v \cos \beta - 2V = -v_0 \cos \alpha \cdots ⑤$ が成立する。

反発係数の公式より、 $e = -\frac{(+v \cos \beta) - (-V)}{(-v_0 \cos \alpha) - 0}$ より、 $v \cos \beta + V = ev_0 \cos \alpha \cdots ⑥$ も成立。⑤、⑥より、 V

を消去して、 $3v \cos \beta = (2e - 1)v_0 \cos \alpha$ だから、②に代入すると $F\Delta t = m \cdot \frac{(2e - 1)v_0 \cos \alpha}{3} + mv_0 \cos \alpha$

である。よって、力積の大きさは $F\Delta t = \frac{2(e+1)mv_0 \cos \alpha}{3}$ である。

- (4) 衝突後の球 A の運動方向が x 軸に平行な方向($\beta = 90^\circ$)に運動するから、④は $v = v_0 \sin \alpha \cdots ④'$ 、⑤より $2V = v_0 \cos \alpha \cdots ⑤'$ 、⑥より $V = ev_0 \cos \alpha \cdots ⑥'$ が成立する。⑤'、⑥'より、反発係数は $e = \frac{1}{2}$ である。

- (5) 衝突が $e=1$ の完全弾性衝突であった場合では、⑥より、 $v \cos \beta + V = v_0 \cos \alpha \cdots ⑥''$ になり、 $v \sin \beta = v_0 \sin \alpha \cdots ④$ 、 $v \cos \beta - 2V = -v_0 \cos \alpha \cdots ⑤$ と合わせて成立する。⑤と⑥''から、 $v \cos \beta = \frac{1}{3}v_0 \cos \alpha \cdots ⑦$ 、 $V = \frac{2}{3}v_0 \cos \alpha \cdots ⑧$ である。運動エネルギーは球 A が $E_A = \frac{1}{2}mv^2$ 、球 B が $E_B = \frac{1}{2} \cdot 2m \cdot V^2 = mV^2$ になる。④、⑦、⑧を代入すると、球 A は $E_A = \frac{1}{2}m(v \sin \beta)^2 + (v \cos \beta)^2$ だが、
 $E_A = \frac{1}{2}mv_0^2 \left(\sin^2 \alpha + \frac{1}{9} \cos^2 \alpha \right) = \frac{1}{2}mv_0^2 \left(1 - \frac{8}{9} \cos^2 \alpha \right) = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{4}{9}mv_0^2 \cos^2 \alpha$ である。また、球 B の運動エネルギーは $E_B = m \cdot V^2 = m \cdot \left(\frac{2}{3}v_0 \cos \alpha \right)^2 = \frac{4}{9}mv_0^2 \cos^2 \alpha$ である。

参考 衝突前の運動エネルギーの和は $\frac{1}{2}mv_0^2$ であり、衝突後の運動エネルギーの和は $E_A + E_B$ だから、上の結果を代入してやると、 $E_A + E_B = \left(\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{4}{9}mv_0^2 \cos^2 \alpha \right) + \left(\frac{4}{9}mv_0^2 \cos^2 \alpha \right) = \frac{1}{2}mv_0^2$ となり、衝突前後で運動エネルギーの和は変化していない(弹性衝突では、エネルギー保存の法則が成立する！)