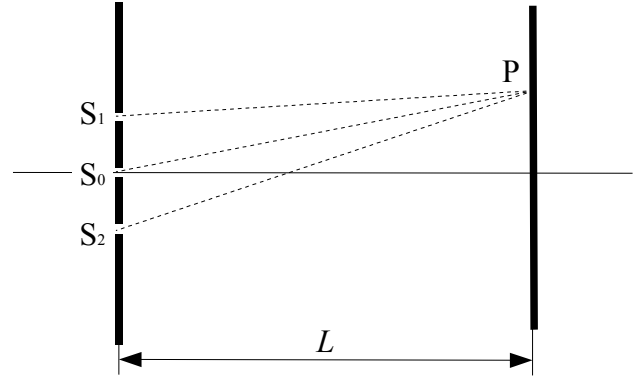


入試問題研究 第72回 1997年 東京工業大学 前期 3

図のように等間隔 $\frac{1}{2}d$ に並んだ3つの十分に細いスリットの列に対して、波長 λ の光の平面波を垂直に入射させるとき、スクリーンに生じる干渉縞を調べる。なお、スクリーンはスリット列に平行で、両者の距離は d より十分に大きい。また、 d は λ より十分に大きく、図中の角度 θ [rad] は十分に小さいとする。



[A] はじめに、真中のスリット S_0 を閉じた場合を考える。スクリーン上の点 P における時刻 t での波の変位はスリット S_1 、 S_2 からの波の重ねあわせとして

$$U_{1+2}(P, t) = A \sin \left[2\pi \left\{ \frac{t}{T} - \frac{1}{\lambda} \left(x_0 - \frac{1}{2} \Delta x \right) \right\} \right] + A \sin \left[2\pi \left\{ \frac{t}{T} - \frac{1}{\lambda} \left(x_0 + \frac{1}{2} \Delta x \right) \right\} \right]$$

と表せる。ここで、 A は波の振幅、 T は波の周期であり、また、 $S_0P = x_0$ として、 $x_0 - \frac{1}{2} \Delta x$ と $x_0 + \frac{1}{2} \Delta x$ はそれぞれ、 S_1 、 S_2 から P までの波の経路の長さである。

- (a) S_1 と S_2 からの波の経路差 Δx を角度 θ の関数として求めよ。さらに、明線が生じる θ を求めよ。必要なら記号 $n (=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots)$ を使え。
- (b) S_1 と S_2 から合成波の P での変位は t に依存しない係数 B を使って次式の形

$$U_{1+2}(P, t) = B \sin \left[2\pi \left\{ \frac{t}{T} - \frac{x_0}{\lambda} \right\} \right]$$

と表せる。このときの係数 B を求めよ。

- (c) 合成波の振幅は B の絶対値 $|B|$ である。明るさが最大（明線）および最小（暗線）となる位置における合成波の振幅を求めよ。

[B] 次に、スリット S_0 を開ける。この場合にも、点 P での合成波の変位は次式の形

$$U_{0+1+2}(P, t) = C \sin \left[2\pi \left\{ \frac{t}{T} - \frac{x_0}{\lambda} \right\} \right]$$

と表せる。

- (d) 係数 C を求めよ。
- (e) 光の明るさは合成波の振幅の2乗に比例するので、(d)の結果から干渉縞には強い明線と弱い明線が交互に生じるのが分かる。強いほうの明るさは弱い方の明るさの何倍になるかを求めよ。さらに、 $0 < \Delta x < 2\lambda$ の範囲内で暗線が生じる Δx の全てを求めよ。
- (f) (e)で述べたような干渉縞が現れる理由は次のように説明される。 Δx は $0 < \Delta x < 2\lambda$ の範囲内にあるとして、空欄を適当に埋めよ。

角スリットからの波の位相差が ① の値になる場合には各波は最大に強めあう。したがって、 $\Delta x =$ ② である点には強い明線が現れる。弱い明線の位置では、スリット ③ とスリット ④ からの波の位相差は ⑤ だから、両者は強めあう。他方、その合成波はスリット ⑥ からの波と ⑦ だけ位相が異なっているので、それらは弱め合う。しかし、前者の合成波と後者の ⑧ が異なるために、完全には打ち消しあわない。そのために明るさは残る。

入試問題研究 第72回 1997年 東京工業大学 前期 3

- (a) S_1, S_2 から P までの波の経路の差は $\frac{\Delta x}{2} = \frac{d}{2} \sin \theta$ であるから $\Delta x = d \sin \theta$ 。(θ が小さいという条件を使って、 $\Delta x = d \theta$ でも可)。

明線が生じる条件は距離の差が波長の整数倍だから、 $d \theta = n \lambda$ である。よって、 $\theta = \frac{n \lambda}{d}$ である。

- (b) $U_{1+2}(P, t) = A \sin \left[2\pi \left\{ \frac{t}{T} - \frac{1}{\lambda} \left(x_0 - \frac{1}{2} \Delta x \right) \right\} \right] + A \sin \left[2\pi \left\{ \frac{t}{T} - \frac{1}{\lambda} \left(x_0 + \frac{1}{2} \Delta x \right) \right\} \right]$ を和積変換公式

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \text{ を適用し、 } U_{1+2}(P, t) = 2A \sin \left[2\pi \left\{ \frac{t}{T} - \frac{x_0}{\lambda} \right\} \right] \cos \left[\pi \left\{ \frac{\Delta x}{\lambda} \right\} \right]$$

だから、振幅は $B = 2A \cos \left[\pi \left\{ \frac{\Delta x}{\lambda} \right\} \right]$ である。

- (c) 振幅は、明るくなる場所（明線）で $|B| = 2A$ 、暗くなる場所（暗線）で $|B| = 0$ である。

[参考] 光の強度は振幅の2乗に比例する。光の強度で示すと $B^2 = 4A^2 \cos^2 \left[\pi \left\{ \frac{\Delta x}{\lambda} \right\} \right]$ である。

明るくなる場所は $\Delta x = m \lambda$ （ただし、 m は整数）であり、その強度は $4A^2$ になる。

- (d) S_0, S_1, S_2 の3つスリットそれぞれの光をあわせ、整理すると次の式が得られる。

$$U_{0+1+2}(P, t) = A \left[1 + 2 \cos \left\{ \pi \frac{\Delta x}{\lambda} \right\} \right] \sin \left[2\pi \left\{ \frac{t}{T} - \frac{x_0}{\lambda} \right\} \right] \text{ より振幅は } C = A \left[1 + 2 \cos \left\{ \pi \frac{\Delta x}{\lambda} \right\} \right].$$

- (e) 光の強度は振幅の2乗に比例するから、このときの光の強度は $C^2 = A^2 \left[1 + 2 \cos \left\{ \pi \frac{\Delta x}{\lambda} \right\} \right]^2$ である。

したがって、最も明るいピークは、 $\Delta x = 2m \lambda$ のとき $9A^2$ の強度になり、次に明るいピークは $\Delta x = (2m+1)\lambda$ とき A^2 の強度となり、明るいピーク（明るい縞模様）は2グループになる。

一方、暗線（光の強度がゼロになる場所）は振幅がゼロより、 $\cos \left\{ \pi \frac{\Delta x}{\lambda} \right\} = -\frac{1}{2}$ になるとき

よって、 $\Delta x = \left(2m+1 \pm \frac{1}{3} \right) \lambda$ のときだから

$$\Delta x = \frac{2}{3} \lambda, \frac{4}{3} \lambda \text{ である。}$$

[参考] 右のグラフはExcelで作成可能です。筆者（志）の場合、数分間で出来てしまいました。挑戦してみたいでしょうか？

- (f) ① 2π ② 2λ ③④ S_1, S_2
⑤ S_0 ⑥ π ⑦ 振幅

