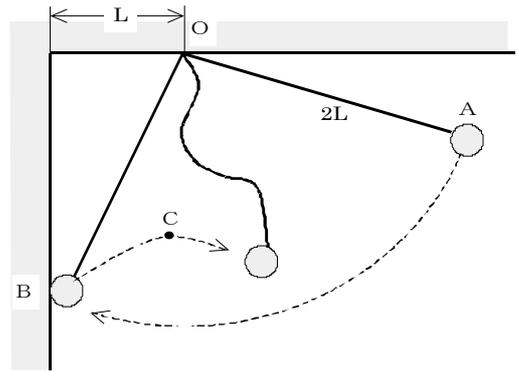


入試問題研究 第73回 2001年 東京大学 ① 等加速度運動、衝突

右図のように、鉛直方向に立っているなめらかな壁から距離  $L$  の支点  $O$  に、長さ  $2L$  の糸を結びつけ、その先に質量  $m$  の小球をつけておく。糸の質量や小球の大きさは無視でき、空気抵抗や支点での摩擦はないものとする。重力加速度を  $g$  として以下の問いに答えなさい。



I この小球を、糸をピンと張った状態で水平に近い角度で A 点から静かにはなすと、糸がまっすぐに伸びた状態で運動し、小球は壁の B 点に速さ  $v$  で衝突した。壁ではねかえった小球は、糸がたるんだ状態で放物運動し、もっとも高く上がった地点 C 点は、支点  $O$  の真下の方向にあった。ただし、壁との衝突は完全弾性衝突とは限らない。

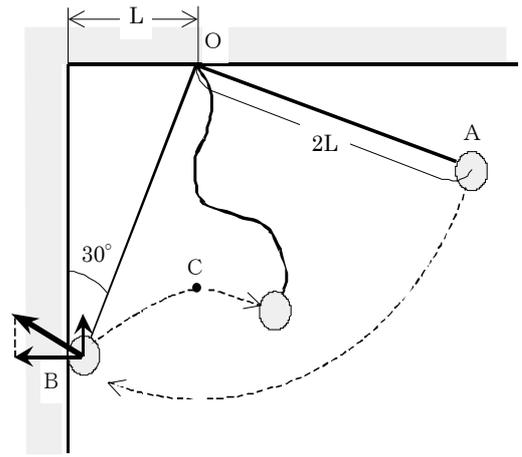
- (1) 衝突直後における小球の速度の鉛直方向成分の大きさを求めなさい。
- (2) もっとも高く上がった地点 C 点と衝突地点 B 点の高低差を求めなさい。
- (3) 衝突直後から再び糸がピンと張る状態になる瞬間までの時間を求めなさい。
- (4) 衝突直後における小球の速度の水平方向成分の大きさを、 $v$ 、 $L$ 、 $v$  を用いて表しなさい。
- (5) はじめに小球をはなした位置 A と衝突点 B の高低差は  $h$  であった。壁のはねかえり係数(反発係数)を、 $L$  および、 $h$  を用いて表しなさい。

II 前問の糸を、質量の無視できる長さ  $2L$  の変形しない棒に取り替えて、B 点からの高低差  $d$  の地点から小球を静かにはなすと、小球は B 点で壁に衝突した。

- (1) 衝突を完全弾性衝突であるとして、衝突の瞬間に小球が受けた力積の大きさを求めなさい。
- (2) 前問の力積のうち、壁から受けた分の大きさはいくらになるか。

入試問題研究 第73回 2001年 東京大学 ① 等加速度運動、衝突 (解答・解説)

右図のように、鉛直方向に立っているなめらかな壁()から距離  $L$  の支点  $O$  に、長さ  $2L$  の糸を結びつけ、その先に質量  $m$  の小球をつけておく。糸の質量や小球の大きさは無視でき、空気抵抗や支点での摩擦はないものとする。重力加速度を  $g$  として以下の問いに答えなさい。



I この小球を、糸をピンと張った状態で水平に近い角度で A 点から静かにはなすと、糸をまっすぐに伸ばした状態で運動し、小球は壁の B 点に速さ  $v$  で衝突した。壁ではねかえった小球は、糸がたるんだ状態で放物運動し、もっとも高く上がった地点 C 点は、支点  $O$  の真下の方向にあった。ただし、壁との衝突は完全弾性衝突とは限らない。

- (1) 衝突直後における小球の速度の鉛直方向成分は変化しないから、衝突前の速度の鉛直成分だから、

$$\text{鉛直成分 } v \sin 30^\circ = \frac{1}{2}v$$

**参考** 衝突前の水平成分  $v \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}v}{2}$

- (2) もっとも高く上がった地点 C 点での鉛直方向の速度はゼロだから、 $v^2 - v_0^2 = 2ax$  より、

$$0^2 - \left(\frac{1}{2}v\right)^2 = 2(-g)y \text{ だから、} y = \frac{v^2}{8g} \text{ より、高低差は } \frac{v^2}{8g} \text{ である。}$$

- (3) 糸が再び張るのは同じ高さになったときだから、 $x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$  より、 $0 = \frac{v}{2} \cdot t + \frac{1}{2}(-g) \cdot t^2$  だ

から、 $t = \frac{v}{g}$  になる。したがって、糸が再び張る時刻は  $\frac{v}{g}$  後である。

- (4) 水平方向の衝突直後の速さを  $v_x$  とし、水平方向は等速運動になるから、 $L = v_x \times \frac{v}{2g}$  が成立

する。したがって、 $v_x = \frac{2gL}{v}$  だから、衝突直後の水平方向成分は  $\frac{2gL}{v}$  である。

- (5) 力学的エネルギー保存の法則より、 $mgh = \frac{1}{2}mv^2 \dots \textcircled{1}$ 、はねかえり係数の公式より、

$$e = \left(\frac{2gL}{v}\right) / \left(\frac{\sqrt{3}v}{2}\right) = \frac{4gL}{\sqrt{3}v^2} \dots \textcircled{2} \text{ が成立するので } v \text{ を消去して、はねかえり係数を求めると、}$$

はねかえり係数は  $e = \frac{2\sqrt{3}L}{3h}$  である。

II 前問の糸を、質量の無視できる長さ  $2L$  の変形しない棒に取り替えて、B点からの高低差  $d$  の地点から小球を静かにはなすと、小球はB点で壁に弾性衝突した。

- (1) 衝突直前の速さは力学的エネルギー保存の法則

$$mgd = \frac{1}{2}mv^2 \text{ から求めると、} v = \sqrt{2gd} \text{ である。棒なの}$$

で衝突直後の速度は反対向きに跳ね返るので、衝突前後での運動量の変化  $(-mv) - (+mv) = -2mv$  である。物体が受けた力積は運動量変化に等しいから、力積の大きさは  $2mv$  である(斜め右下水平から  $30^\circ$  の向き)。

- (2) 滑らかな壁だから、物体が受ける力(力積)は平方向成分のみであり、棒からの力(力積)は棒が突っ張る向きである(上図参照)。

$$\text{よって、壁から受ける力積の大きさは } \frac{2mv}{\cos 30^\circ} = \frac{4\sqrt{3}mv}{3} \text{ で}$$

あることが分かる。

