

入試問題研究 第74回 2003年 名古屋大学 ① 単振動

一端を固定した水平なばねの他端に取り付けた物体が、水平な床の上を、ばねの弾性力と床からの摩擦力を受けて、直線運動する。ばねの質量は無視できるほど軽く、ばねは床に触れることなく、水平方向に伸び縮みすることができる。ばねの弾性力についてはフックの法則が成立するものとする。物体の質量を m 、ばね定数を k 、物体と床の間の静止摩擦係数を μ_0 、動摩擦係数を μ_1 、摩擦係数の

比を $\gamma = \frac{\mu_1}{\mu_0}$ (< 1)、重力加速度を g とする。物体の位置(左端の位置) x は、物体が運動する方向の

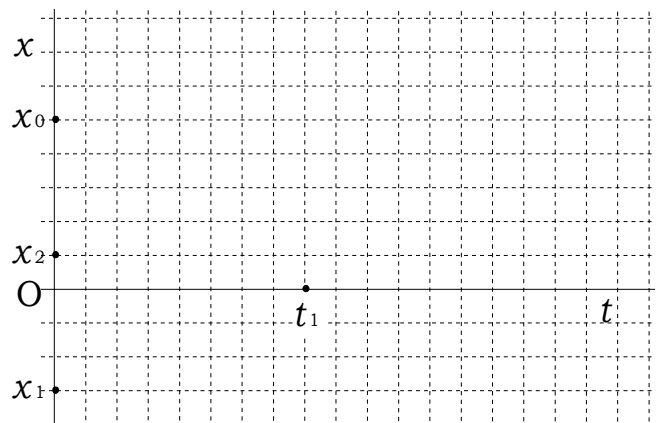
座標軸を用いて測り、ばねがしぜん長の長さになる物体の位置を原点 O とし、右向きを正とする。

物体を位置 x におき静かに手を離したとき、物体がそこに静止するためには、位置 x はある範囲内になければならなかった。この範囲を物体の静止可能範囲と呼び、範囲内の位置 x の最大値 d と表そう。

物体を静止可能範囲外に置くと、物体は置かれた位置に静止することができず、運動を始める。この運動において物体に働く動摩擦力は、大きさは常に一定であるが、その向きは物体の速度 v の正負によって異なる。そこで、以下では物体の運動をその速度 v の正負に応じて2種類に分類し、 $v > 0$ の運動を右向き運動、 $v < 0$ の運動を左向き運動と呼ぼう。

物体を位置 x_0 ($> d$) に置き、時刻 $t=0$ に静かに手を離したら、物体は左向き運動を始め、時刻 t_1 に位置 x_1 に速度ゼロになった。その後、物体は右向き運動に転じ、時刻 t_2 に位置 x_2 に速度ゼロになり、そこで物体は運動をやめて静止した。以下の問いに答えなさい。

- (1) 物体の静止可能範囲と、範囲内の位置 x の最大値 d を求めよ。
- (2) 最初の左向き運動の範囲 $x_1 \leq x \leq x_0$ について調べてみよう。答えは d と γ (摩擦係数の比)を用いて表せ。
 - (a) 時刻 $t=0$ と t_1 とにおける力学的エネルギーの間に成り立つ関係を考えて、位置 x_1 を d 、 γ と位置 x_0 を用いて表せ。
 - (b) 物体の速度が0になった位置 x_1 で物体が静止してしまわないためには、物体を置く位置 x_0 はどの範囲内になければならないか。
 - (c) 物体が位置 x にあるとき、自然の長さから測ったばねの伸び縮みの大きさは $|x|$ である。時刻 $t=0$ 、 t_1 の間で起こった、ばねの伸び縮みの大きさの変化 $|x_1| - |x_0|$ を求めよ。
- (3) 左向き運動について、もう少し詳しく調べてみよう。
 - (a) 物体の位置を x 、加速度を a として、物体の運動方程式を作れ。
 - (b) 物体にはたらく力が0になる位置 d_1 を求めよ。(答えは d と γ を用いて表せ。)
 - (c) 物体の左向き運動はどのような運動になるか。運動方程式に基づいて説明せよ。
 - (d) 物体の速度が0になった時刻 t_1 を求めよ。
- (4) 右向き運動についても、左向き運動と同じようにして調べる事が出来る。 $0 \leq t \leq t_2$ の範囲で、時刻 t における物体の位置 x の時間変化を右図に図示せよ。また、 t 軸上に時刻 t_2 の位置を記入せよ。



入試問題研究 第74回 2003年 名古屋大学 ① 単振動 (解答・解説)

(1) ばねの力が最大摩擦力未満であれば良いので $kx < \mu_0 mg$ の条件だ。よって静止可能範囲は

$$-\frac{\mu_0 mg}{k} < x < \frac{\mu_0 mg}{k} \text{ である。よって最大値は } d = \frac{\mu_0 mg}{k} \dots \textcircled{1} \text{ である。}$$

(2) (a) 物体と床の間の摩擦力に逆らってする仕事分だけ力学的エネルギーが減少するので、

$$\mu_1 mg(x_0 - x_1) = \frac{1}{2} k x_0^2 - \frac{1}{2} k x_1^2 \text{ より、 } 2\mu_1 mg(x_0 - x_1) = k(x_0 - x_1)(x_0 + x_1) \text{ だから、}$$

$$x_1 = \frac{2\mu_1 mg}{k} - x_0 \text{ より、}\textcircled{1} \text{ を使って整理すると } x_1 = \frac{2\mu_1 d}{\mu_0} - x_0 = 2\gamma d - x_0 \text{ である。}$$

(b) x_1 が静止可能範囲外になればよいので $x_1 < -d$ である(下のグラフ用紙からも分かる!) から、 $x_1 = 2\gamma d - x_0 < -d$ より、最初の位置は $x_0 > (2\gamma + 1)d$ であれば良い。

(c) $x_1 < 0$ より、ばねの伸び縮みの大きさの変化は $|x_1| - |x_0| = x_0 - 2\gamma d - x_0 = -2\gamma d$ である。

(3) (a) 物体に働く力はばねの力が $-kx$ 、動摩擦力が $\mu_1 mg$ だから、このときの物体の運動方程式は

$$ma = -kx + \mu_1 mg = -k\left(x - \frac{\mu_1 mg}{k}\right) \dots \textcircled{2} \text{ である。}$$

(b) 物体に働く力が0になる位置は $0 = -kx + \mu_1 mg$ より、 $x = \frac{\mu_1 mg}{k}$ である。(2)の(a)と同様に整理して、力が0になる位置は $x = \gamma d$ である。

(c) 式② $ma = -k\left(x - \frac{\mu_1 mg}{k}\right)$ より、 $a = -\frac{k}{m}\left(x - \frac{\mu_1 mg}{k}\right)$ だから、定点 $x = \frac{\mu_1 mg}{k}$ からのずれに比例し、ずれと逆向きの加速度が働いていることを示す。これは、この物体の運動が、定点 $x = \frac{\mu_1 mg}{k} = \gamma d$ を中心とし、角振動数 $\sqrt{\frac{k}{m}}$ (周期が $2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$) である単振動になることを意味する。

(d) 単振動であることが分かれば次に速度0になる時刻は半周期ごとであるので、次に速度0になるのは $t_1 = \pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ のときである。

(4) 左向き運動の場合も運動方程式を作って考えてみる。ばねの力が $-kx$ 、動摩擦力が

$$-\mu_1 mg \text{ であるので、運動方程式は } ma = -kx - \mu_1 mg = -k\left(x + \frac{\mu_1 mg}{k}\right) \text{ である。加速度を}$$

求めると $a = -\frac{k}{m}\left(x + \frac{\mu_1 mg}{k}\right)$ となるので、この場合、定点 $x = -\frac{\mu_1 mg}{k} = -\gamma d$ を中心とし、角

振動数 $\sqrt{\frac{k}{m}}$ (周期が $2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$) である単振

動になることを意味する。

(2) より、 $|x_1| - |x_0| = -2\gamma d$ であるので、グラフの目盛りは x_0 が5目盛り、 x_1 が3目盛りだから、 γd は1目盛り分に相当する。

また、(3) より、左向き運動のときの単振動の中心が $+\gamma d$ (t 軸より1目盛り上)、右向き運動のときの単振動の中心が $-\gamma d$ (t 軸より1目盛り下) であるから、右図のような運動になる。

