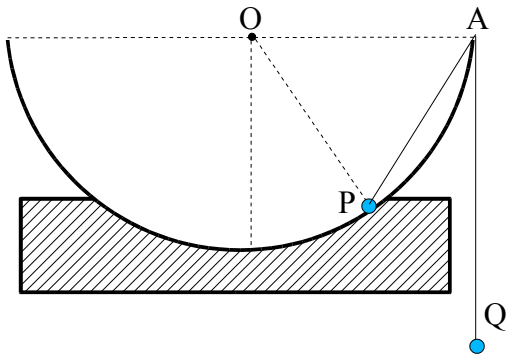
入試問題研究　第 75 回　　2004 年　大阪市立大学　　力学の総合問題　　（一部改）

なめらかな半径 r の半球形のわんが水平に固定されている。質量 M の小球 P と質量 m （ $M>m$ ）の小球 Q を $2r$ より長い軽くて伸びない糸で結び、図のように P をわんの内側に入れて、わんの縁 A に糸をかける。重力加速度の大きさを g とし、P の位置は球の中心 O を中心とした角度∠AOP=θ で測るものとする。以下の問 1、問 2 のそれぞれの場合について答えよ。



※ このようなタイプの問題は昔は良く見かけたが、 最近は余り
見かけなくなった。糸口さえ見つければ簡単なのだが、別解も含めて解答までの道のりは面白いところが多い。

問1　小球 P が $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ でつりあった。この場合、 M 、 m の間に成り立つ関係を求めよ。また、わんから P に働く抗力の大きさを M 、 g で求めなさい。

問2　小球 P を A のすぐ内側（ $\theta=0$ ）で静かに放すと、下方へ滑り出した。この場合について、以下の問いに答えよ。

(1)　放した直後に糸が P を引く力の大きさを M 、 m 、 g で求めなさい。

(2)　小球 P が最下点 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ を通過するために必要な M 、 m の間の条件を不等式で表せ。

(3)　小球 P が図のように角 θ の点を通過するとき、P の速さ V と Q の速さ v の間に成り立つ関係を求めよ。また、 V を r 、 g 、 M 、 m 、 θ で表せ。

(4)　小球 P が $\theta=\theta_C$ の点に達したとき速度ゼロになった。このとき Q は、はじめの位置から h だけ上昇していた。 $\cos\dfrac{\theta_C}{2}$ を M 、 m で表し、 h を r 、 M 、 m で表せ。

(5)　その後、P と Q はそれぞれどのような運動を続けるか述べよ。ただし、 $\theta_C>0$ とする。

入試問題研究　第 75 回　　2004 年　大阪市立大学　　力のつりあい

問1　P の重力は　Mg　、糸の張力が　mg　、わんからの垂直抗力　N　の3力のつりあいになる。　$\theta=\dfrac{\pi}{3}$

であるので、　$Mg=mg\cos 30°\times 2$　だから、　$M=\sqrt{3}m$　の関係が成立している。

問2

(1)　放した直後、P は鉛直に落下する。よって、P は下向きに加速度　a　、Q は上向きに　a　である(それぞれの運動は鉛直方向)。運動方程式は、P が　$Ma=Mg-T$　･･･①、Q が　$ma=T-mg$　･･･②

だから、加速度が　$a=\dfrac{(M-m)g}{M+m}$　になり、糸が引く力は　$T=\dfrac{2Mmg}{M+m}$　である。

(2)　手を離したときと小球 P が最下点　$\theta=\dfrac{\pi}{2}$　を通過するときにおいて、力学的エネルギー保存の法則を適用すると　$Mg\times r=mg\times\sqrt{2}r+\dfrac{1}{2}MV^2+\dfrac{1}{2}mv^2$　の関係式が成立する。運動エネルギーが存在すれば、小球 P が最下点　$\theta=\dfrac{\pi}{2}$　を通過できる。よって、　$M>\sqrt{2}m$　であれば良い。

(3)　「Q の速さは AP の長さの時間微分したもの」になる。P の速さを　V　とすると、　$V=r\omega$　である。

AP の長さは　$L=2r\sin\dfrac{\theta}{2}$　･･･③ である。③を時間 t で微分すると、　$\dfrac{dL}{dt}=2r\cos\dfrac{\theta}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\dfrac{d\theta}{dt}$　である。

$\dfrac{d\theta}{dt}=\omega$　、　$\dfrac{dL}{dt}=v$　だから、　$v=r\omega\cos\dfrac{\theta}{2}$　より、　$v=V\cos\dfrac{\theta}{2}$　･･･④ になる。

力学的エネルギー保存の法則より　$Mgr\sin\theta=mg\cdot 2r\sin\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{1}{2}MV^2+\dfrac{1}{2}mv^2$　が成立する。④を代入して　$Mgr\sin\theta=mg\cdot 2r\sin\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{1}{2}MV^2+\dfrac{1}{2}mV^2\cos^2\dfrac{\theta}{2}$　であるから、小球 P の速度は

$V=\sqrt{\dfrac{2gr\left(M\sin\theta-2m\sin\dfrac{\theta}{2}\right)}{M+m\cos^2\dfrac{\theta}{2}}}$　･･･⑤ と表される。

(4)　Q が　h　だけ上昇したので、AP の長さは　h　であるから、③より　$h=2r\sin\dfrac{\theta_C}{2}$　･･･⑥ である。

そのとき速度ゼロになるから、⑤より　$M\sin\theta_C-2m\sin\dfrac{\theta_C}{2}=0$　が成立する。⑤式に倍角公式を適用して　$2M\sin\dfrac{\theta_C}{2}\cos\dfrac{\theta_C}{2}-2m\sin\dfrac{\theta_C}{2}=0$　である。よって、　$\cos\dfrac{\theta_C}{2}=\dfrac{m}{M}$　･･･⑦ である。

⑥より　$\cos\dfrac{\theta_C}{2}=\sqrt{1-\left(\dfrac{h}{2r}\right)^2}$　だから、⑦に代入して　$\dfrac{m}{M}=\sqrt{1-\left(\dfrac{h}{2r}\right)^2}$　が成立する。これより　h　を求めると、　$h=2r\sqrt{1-\left(\dfrac{m}{M}\right)^2}$　である。

(5)　速度 0 になった位置での P が受ける力の球面に沿った方向成分は　$F=Mg\cos\theta_C-mg\cos\dfrac{\theta_C}{2}$

である。⑦を代入して　$F=2Mg\left(\dfrac{m}{M}\right)^2-Mg-mg\left(\dfrac{m}{M}\right)=\dfrac{2m^2g-M^2g-m^2}{M}=\dfrac{(m^2-M^2)g}{M}<0$　であるので、P は速度ゼロの後バックし始める。摩擦が無いので力学的エネルギー保存の法則が成立するので、P、Q は往復運動を繰り返す。