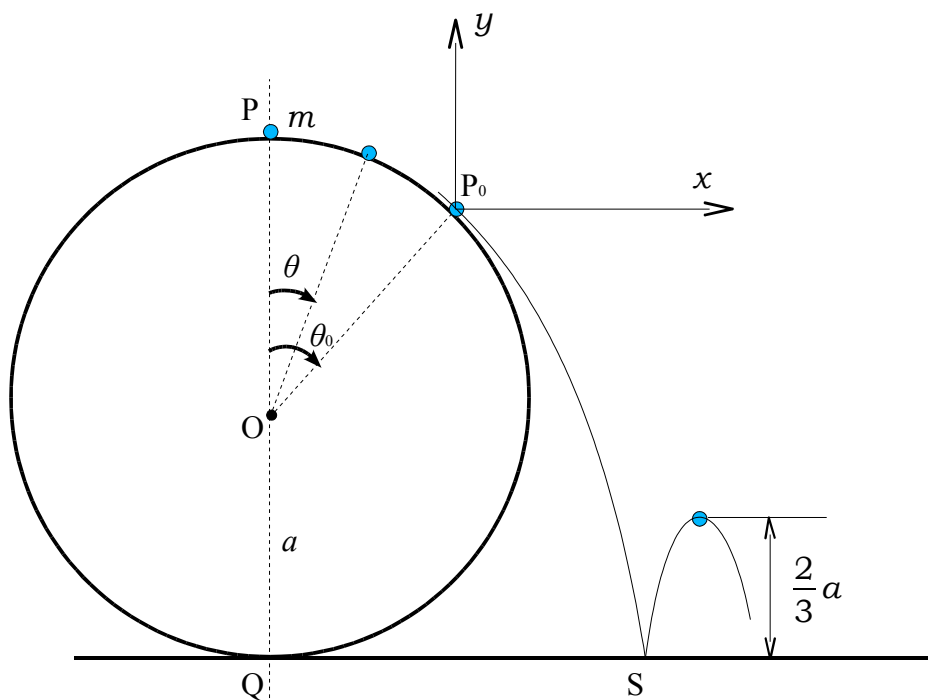


入試問題研究 第76回 2004年 新潟大学 ① 力学(円運動)

図に示す半径 a の滑らかな球面の頂点 P から、質量 m の小さな物体が球面上を初速度 0 で滑り始めた。物体は点 P_0 で球面をはなれた後、水平な地表面の点 S に到達し、はね返った。球は中心を点 O とし、点 Q で地面に固定されている。重力加速度を g とし、以下の問いに答えよ。



問1 図の角度 θ の位置まで滑り降りたときの速さ v を求めよ。

問2 図の角度 θ の位置での球面上の物体に作用する抗力の大きさ R を求めよ。

問3 OP と OP_0 のなす角度を θ_0 とし、 $\cos \theta_0$ を求めよ。

問4 図のように点 P_0 を原点とし、 x 軸を水平方向、 y 軸を鉛直方向にとる。物体が点 P_0 で球面を離れた瞬間における、速度の x 成分 v_x 、 y 成分 v_y を a と g を用いて表せ。

問5 物体が点 P_0 で球面を離れた瞬間から地表面の点 S に到達するまでの時間を求めよ。

問6 点 S に到達する直前における、物体の速度の x 成分 u_x 、 y 成分 u_y を a と g を用いて表せ。

問7 物体は点 S で地表に衝突したあと、図のように高さ $\frac{2}{3}a$ まで跳ね返った。物体と地表の間の跳ね返り係数 e を求めよ。

入試問題研究 第76回 2004年 新潟大学 ① 力学(円運動) (解答・解説)

問1 力学的エネルギー保存の法則より、 $mga(1-\cos\theta)=\frac{1}{2}mv^2$ が成立するから、角度 θ の位置を通過するときの速度は $v=\sqrt{2ga(1-\cos\theta)}$ …① である。

問2 角度 θ の位置で物体に働く抗力 R とする。中心方向の力 $mg\cos\theta-R$ が向心力となるので $mg\cos\theta-R=\frac{mv^2}{a}$ が成立、 v 代入して $mg\cos\theta-R=m\cdot 2g(1-\cos\theta)$ より、物体に働く抗力は $R=(3\cos\theta-2)mg$ …② である。

問3 OP_0 のとき、物体は球面から離れるから抗力がゼロになる。②より $\cos\theta_0=\frac{2}{3}$ …③。

問4 P_0 での速度は、①に③を代入して $v_0=\sqrt{\frac{2ga}{3}}$ 。また、③より $\sin\theta_0=\frac{\sqrt{5}}{3}$ だから、速度の x 成分が $v_x=\sqrt{\frac{2ga}{3}}\cos\theta_0=\frac{2\sqrt{6ga}}{9}$ 、 y 成分が $v_y=-\sqrt{\frac{2ga}{3}}\sin\theta_0=-\frac{\sqrt{30ga}}{9}$ 。

問5 点 P_0 は地表面から $h=a(1+\cos\theta_0)$ より、③を代入して $h=\frac{5}{3}a$ である。等加速度運動の公式に代入して、 $-\frac{5}{3}a=-\frac{\sqrt{30ga}}{9}\cdot t_1-\frac{1}{2}\cdot g\cdot t_1^2$ より $9gt_1^2+2\sqrt{30ga}t_1-30a=0$

だから、2次方程式の解の公式より、床に落ちる時刻は $t_1=\frac{\sqrt{30}(\sqrt{10}-1)}{9}\cdot\sqrt{\frac{a}{g}}$ である。

問6 点 P_0 から点 S に到達する直前における物体の速度は、水平方向は等速運動だから、 x 成分は変わらない($u_x=v_x$)ので $u_x=\frac{2\sqrt{6ga}}{9}$ である。また、縦方向は下向き g の等加速度運動だ。このとき y 成分 u_y とすると、等加速度運動の公式 $v=v_0+at$ に代入して、

$u_y=-\frac{\sqrt{30ga}}{9}-g\left\{\frac{\sqrt{30}(\sqrt{10}-1)}{9}\right\}\sqrt{\frac{a}{g}}$ が成立する。よって、床に衝突する直前の速度は

、 x 成分が $u_x=\frac{2\sqrt{6ga}}{9}$ 、 y 成分が $u_y=-\frac{10\sqrt{3ga}}{9}$ である。

問7 跳ね返り係数を e とすると、物体は点 S で地表に衝突した後の y 方向の速度は、

$u'_y=\frac{10e\sqrt{3ga}}{9}$ である。高さ $\frac{2}{3}a$ まで跳ね返るので、 $0^2-\left(\frac{10e\sqrt{3ga}}{9}\right)^2=-2g\frac{2}{3}a$

だから、 $e=\frac{6}{10}$ である。よって、床との跳ね返り係数は $e=\frac{6}{10}$ である。