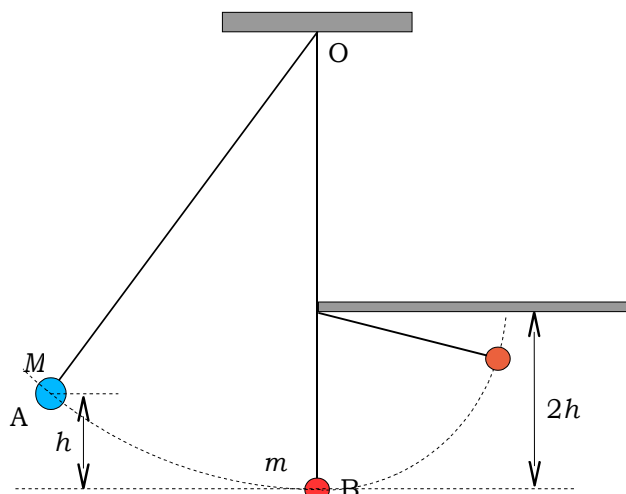


入試問題研究 第81回 2003年 筑波大学 ① 力学(運動量とエネルギー)

図のように、2本の同じ長さの糸にそれぞれ質量 M の質点 A と質量 m の質点 B が支点 O からつるされており、質点 A は糸のたるみがないように最下点から高さ h のところまで持ち上げられ、質点 B は O を通る鉛直線上に静止している。また、高さ $2h$ のところにいたが水平に設置され、その左端は O を通る円直線上にある。質点 A を静かに放すと、質点 B に正面衝突した後、質点 B は水平方向右向きに運動しはじめ、質点 B をつるした糸がいたの左端で折れ曲がった後、板に衝突した。



以下の問い(問1～5)に答えよ。ただし、AとBの衝突におけるはねかえり係数を e 、重力加速度を g とし、 m は M より小さいとする。また、糸の質量と伸縮、空気の抵抗は無視できるものとする。考え方や計算の要点も示せ。

問1 質点 A が質点 B に衝突する直前の質点の速さ v_0 および運動エネルギー T を M 、 g 、 h を用いて表せ。

問2 衝突直後の質点 A の速さを v_1 、質点 B の速さを v_2 とするとき、 v_1 、 v_2 の満たす式を v_0 、 M 、 m 、 e を用いて二つ書け。

問3 問1、問2の結果を用いて衝突直後の質点 B の速さ v_2 を求めよ。結果は M 、 m 、 e 、 g 、 h を用いて表せ。

問4 質点 B が板に衝突するときの速さ v_3 を M 、 m 、 e 、 g 、 h を用いて表せ。

問5 m が M に比べて十分小さいとき、質点 B が板に衝突するためにはねかえり係数 e が満たすべき条件を求めよ。

入試問題研究 第81回 2003年 筑波大学 ① 力学（運動量とエネルギー）

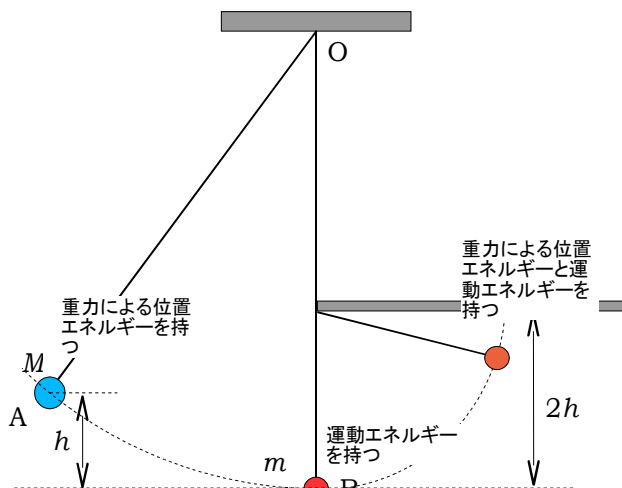
力学的エネルギー保存の法則を使って、衝突直前の A の速度を求め、衝突の計算により B の速度を求める... 基本的な問題ばかりであるので、容易に得点できるであろう。

なお、 m は M より小さいとする理由は何だろうか。考えてみよう。

問1 力学的エネルギー保存の法則より、

$$Mgh = \frac{1}{2}Mv_0^2 \text{ が成立する。よって、}$$

質点 A が質点 B に衝突する直前の質点の速さは $v_0 = \sqrt{2gh}$ および運動エネルギー $T = Mgh$ である。



問2 衝突直後の質点 A の速さを v_1 、質点 B の速さを v_2 とすると、運動量保存の法則より、

$$Mv_0 = Mv_1 + mv_2 \quad \dots \textcircled{1}, \text{ はねかえり係数の公式より } e = -\frac{v_1 - v_2}{v_0} \quad \dots \textcircled{2} \text{ が成立する。}$$

問3 ①、②より、連立方程式を解いて、 $v_2 = \frac{(1+e)Mv_0}{m+M}$ だから、衝突直後の質点 B の速さは

$$v_2 = \frac{(1+e)M\sqrt{2gh}}{m+M} \text{ である。}$$

問4 力学的エネルギー保存の法則より、 $\frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}mv_3^2 + mg \cdot 2h$ が成立する。よって、

$$v_3 = \sqrt{v_2^2 - 4gh} = \sqrt{\frac{2(1+e)^2ghM^2}{(m+M)^2} - 4gh} \text{ だから、質点 B が板に衝突するときの速さ}$$

$$v_3 \text{ は、 } v_3 = \sqrt{2gh} \cdot \sqrt{\left(\frac{(1+e)^2M^2}{(m+M)^2} - 2\right)} \text{ である。}$$

問5 m が M に比べて十分小さいとき、質点 B が板に衝突するためには v_3 が存在すれ

ばよい。すなわち、 $\sqrt{\frac{(1+e)^2M^2}{(m+M)^2} - 2}$ の根号内が正であれば良いことになる。

M を無限大まで極限值を求めて、 $\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{(1+e)^2}{((m/M)+1)^2} - 2 = (1+e)^2 - 2 > 0$ だから、

$e > \sqrt{2} - 1$ であればよい。