

## 入試問題研究 第82回 2003年 北海道大学 ① 力学 (ばねの単振動)

次の文章を読み、問1から問3の  の中に適切な式をいれなさい。ただし、問4はグラフに答えよ。

図1に示すように、水平な床面上に質量  $m$  の物体 A を置き、つるまきばねを取り付ける。ばねが床面と水平になるように、ばねの他端を固定する。物体 A は図の  $x$  軸上を運動し、その位置を座標  $x$  で表す。ば

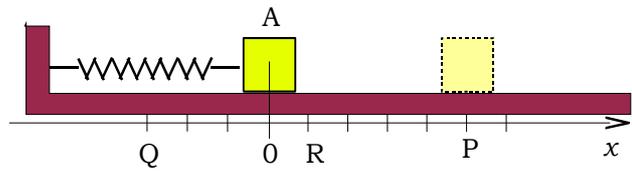


図1

ねが自然長のとき、物体 A の位置  $R$  を原点  $x=0$  にとり、ばね定数を  $k$  [N/m] とする。物体 A と床面との間の動摩擦係数を  $\mu$  とする。ただし、重力加速度を  $g$  [m/s<sup>2</sup>] とし、ばねの質量は無視できるものとする。

物体 A を P 点 ( $x=5l$ ) まで引っ張り、時刻  $t=0$  で静かに手を放した。このとき、物体 A は  $x$  軸の負の向きに動き始め、Q 点 ( $x=-3l$ ) で運動の向きを反転し、再び  $x$  軸正の向きに運動した。その後、物体 A は時刻  $T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$  [s] で R 点 ( $x=l$ ) に静止した。なお、以下の問いでは  $l$  を用いても良い。

問1 物体 A が P から Q まで移動するとき、ばねにたくわえられた位置エネルギー (弾性エネルギー) 変化は  (1) [J] と表される。また、この間に動摩擦力がした仕事は  (2) [J] である。

両者の仕事は相等しいので、動摩擦係数  $\mu$  は  (3) と求められる。

問2 時刻  $t=0$  で手を離れた物体 A はしだいに速さを増し、最大の速さになったのち、徐々に減速して Q 点で 0 となった。この間、物体 A が受ける力は右向きを正として  (4) [N] と表される。したがって、物体 A の運動は  $x = \text{input type="text"/> (5) [m]$  を中心とする単振動の動きに等しいことがわかる。よって、この中心で物体 A の速さは最大となり、その値は  (6) [m/s] となる。また、物体 A が Q 点で反転する時刻は  (7) [s] である。

問3 次に物体 A が Q から R まで移動するとき、物体 A に作用する力は右向きを正として  (8)

[N] と表され、この区間の振動の中心は  $x = \text{input type="text"/> (9) [m]$  である。

問4 物体 A の座標  $x$  と時間  $t$  との関係をグラフに示せ。

入試問題研究 第82回 2003年 北海道大学 ① 力学 (ばねの単振動)

問1 Pでは、ばねが  $5l$  伸びているので  $U_P = \frac{1}{2}k(5l)^2 = \frac{25}{2}kl^2$  [J]、Qでは、ばねが  $3l$  縮んでいるので  $U_Q = \frac{1}{2}k(3l)^2 = \frac{9}{2}kl^2$  であるので、ばねにたくわえられた位置エネルギー(弾性エネルギー)変化は  $-8kl^2 \cdots(1)$  [J] と表される。また、この間の動摩擦力は  $\mu mg$ 、動いた距離が  $-8l$ 、だから、動摩擦力がした仕事は  $-\mu mgl \cdots(2)$  [J] である。両者の仕事は相等しいので、動摩擦係数  $\mu$  は  $\mu = \frac{kl}{mg} \cdots(3)$  と求められる。

問2 時刻  $t=0$  で手を離れた物体 A は次第に速さを増し、最大の速さになったのち、徐々に減速して Q 点で 0 となった。この間、物体 A が受ける力は位置  $x$  のとき、右向きを正として  $f = \mu mg - kx = kl - kx \cdots(4)$  [N] と表される。したがって、物体 A の運動方程式は  $ma = -k(x-l)$  であるから、この運動は、 $x=l \cdots(5)$  [m] を中心、角振動数が  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ 、周期が  $2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$  の単振動になることがわかる。

よって、中心を通過するとき物体 A の速さは最大となる。そのとき、摩擦で失われるエネルギーは  $\mu mg \times 4l$  だから、 $4kl^2$  となる。よって、 $\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kl^2 = \frac{25}{2}kl^2 - 4kl^2$  の関係が成立する。よって、 $v = \sqrt{\frac{16kl^2}{m}} \cdots(6)$  [m/s] となる。また、物体 A が Q 点で反転する時刻は単振動の半周期後だから、 $\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \cdots(7)$  [s] である。

問3 次に物体 A が Q から R まで移動するとき、物体 A に作用する力は右向きを正として、摩擦力が  $-\mu mg$ 、ばねの力が  $-kx$  だから、 $-kx - kl \cdots(8)$  [N] と表され、運動方程式は  $ma = -k(x+l)$  になるから、この区間の振動の中心は  $x = -l \cdots(9)$  [m] である。

問4 物体 A の座標  $x$  と時間  $t$  との関係は右図。

